Contact Force Modeling for Robotic Grinding with Special-shaped Disc Considering Profile Features

GUO Wanjin[1,2,3,4], *WU Guang*[1], *ZHU Heng*[1], *CHEN Zhuhong*[1], *ZHAN Zili*[1], *CAO Chuqing*[2,4,5], *ZHAO Lijun*[2,6], *GUO Lei*[1,4*], *ZHU Wenfeng*[1,4]

(1. Key Laboratory of Road Construction Technology and Equipment, Ministry of Education, Chang'an University, Xi'an 710064, China; 2. Yangtze River Delta HIT Robot Technology Research Institute, Anhui Wuhu 241007, China; 3. EFORT Intelligent Equipment Co., Ltd., Anhui Wuhu 241060, China; 4. Wuhu HIT Robot Technology Research Institute Co., Ltd., Anhui Wuhu 241007, China; 5. School of Computer and Information, Anhui Polytechnic University, Anhui Wuhu 241000, China; 6. School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150000, China)

ABSTRACT: In order to characterize the contact force of robotic grinding with special-shaped discs with small pointed tips and significant base pressure difference, the work aims to propose a modeling method to calculate the grinding contact force of the robotic special-shaped disc considering the flexural deformation of the thin plate and the elastic deformation of the rubber disc within a two-layer structure. Firstly, the relationship between contact force and the flexural deformation of the thin plate was analyzed based on the theory of thin plates. Furthermore, according to the static elastic theory, the elastic deformation and contact force model of rubber plate in the elastic deformation region was established. Then, the finite element numerical simulation was conducted to explore the elastic deformation parameters of the rubber disc and the flexural deformation parameters of the thin plate. By employing the variable substitution, a numerical inverse function model of the contact force in relation to the normal feed displacement of the special-shaped disc was derived. Finally, a robotic experimental platform dedicated to special-shaped disc grinding was constructed. Validation experiments were performed on a flat workpiece and a workpiece with three different curved surfaces to verify the effectiveness of the contact force model across various workpiece shapes and surface curvatures. The results of these validation experiments confirmed that the contact force model accurately predicted the contact force, particularly when the disc inclination angle was significant. In the consistency verification experiments for robotic special-shaped disc grinding, it was observed that under identical grinding parameter conditions, the average grinding depth for the three different grinding paths was 0.066 3, 0.063 2, and 0.064 5 mm, respectively. The maximum deviations were 0.013 9, 0.009 0, and 0.010 8 mm, respectively. The coefficients of variation for each path were determined as 11.2%, 6.4%, and 9.6%, respectively. The experimental validation confirmed the effectiveness of the proposed method. The proposed method considers the morphological features of the special-shaped disc and incorporates parameters such as workpiece surface curvature, disc inclination angle, profile parameters, and disc dimensions into the grinding contact force model. It also describes the numerical inverse function relationship between the grinding contact force and the normal feed displacement of the special-shaped disc. This method enables the measurement of the contact region in special-shaped disc grinding operations and provides insights into the factors affects the grinding contact force. It serves as a theoretical basis for efficient and high-quality grinding with the constant contact force in robotic special-shaped disc grinding operations.

KEY WORDS: contact force modeling; special-shaped disc grinding; flexural deformation; elastic deformation; robotic grinding

机器人磨削具有作业效率高、成本低廉和经济环保等优点，逐步替代了人工磨削作业方式[1-3]。盘式工具具有质量轻、灵活性高的特点，且盘式工具橡胶底面和工件表面柔性接触，在机器人磨削过程中易实现材料的均匀去除，已较为广泛地应用于风力发电机叶片和汽车轮毂等复杂工件表面的精细磨削场合中[4-8]。现有盘式工具具有各异的廓形特征如圆盘、方形盘和异型盘等，其中异型盘因尖端小和接触压力大而磨削效率更高。然而，机器人磨削作业易因接触力过大或过小而导致磨削过度或磨削不足，准确性和适用性更高的接触力模型对机器人异型盘磨削十分重要。

在现有接触力建模研究中，最常用的模型是基于赫兹理论描述的赫兹接触模型[9-11]，它用于描述 2 个弹性体之间的法向接触力，且弹性体之间被认为是点接触形式，即接触面积相对于物体几何廓形忽略不计，以椭圆形分布方式呈现接触力。然而，在磨削作业过程中盘式工具始终与工件之间保持相应工具倾角，且接触区域形状受廓形特征影响，赫兹理论不能够更为准确地表征盘式工具磨削作业的接触力。

近年来，诸多学者在宏观接触力建模方面开展了

表 1　接触力与挠曲形变计算结果
Tab.1 Calculation results of contact force and flexural deformation

Samples	h/mm	h_2/mm	h_1/mm	F/N
1	0.5	0.323	0.177	1.82
2	1.0	0.541	0.459	5.29
3	1.5	0.713	0.787	9.36
4	2.0	0.862	1.138	14.53
5	2.5	0.981	1.519	20.94
6	3.0	1.087	1.913	27.42
7	3.5	1.183	2.317	33.53
8	4.0	1.262	2.738	41.68

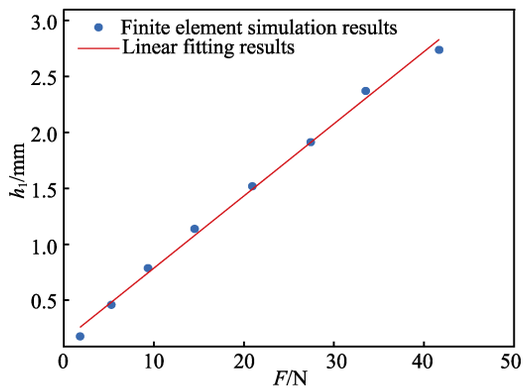


图 11　薄板挠曲形变与接触力线性拟合结果
Fig.11 Linear fitting results of contact force and thin plate flexural deformation

异型盘形变原理，使用异型盘法向进给位移将薄板挠曲形变和橡胶板弹性形变进行替换，建立接触力与异型盘法向进给位移反函数模型如式（30）所示。

$$h=k_1F+\left(\frac{\bar{E}_2}{H^{\beta}}\frac{2\sqrt{2}}{\beta+1}\theta^{-3/2}\bar{R}^{1/2}\int_0^1(1-t^2)^{\beta+1}\mathrm{d}t\right)^{(-1)/(\beta+3/2)}F^{1/(\beta+3/2)} \tag{30}$$

将求解的参数 $\bar{E}_2$、β 和 k_1 代入式（30），得到接触力数值形式反函数模型如式（31）所示。其中等效半径 $\bar{R}$ 与工件表面曲率二次系数 B、盘倾角 θ、廓形参数 k_2 和异型盘参数 m 相关，力的单位为 N，长度单位均为 mm，角度单位为 rad。

$$h=0.06F+3.01\theta^{0.677}\bar{R}^{-0.226}F^{0.451} \tag{31}$$

保持恒定接触力开展机器人异型盘磨削作业对提升工件表面磨削深度一致性与提高工件表面质量十分重要。根据式（23），在异型盘型号具体确定后，廓形参数和异型盘参数将随之确定，当设定恒定盘倾角后，等效半径只与工件表面曲率二次系数相关。于是，通过所提方法，在磨削前预设接触力，即可计算获得对应的磨削路径曲面各位置点处异型盘法向进给位移，进而可以通过调节机器人异型盘法向进给位移，实现机器人异型盘恒定接触力磨削作业，保证工件表面磨削深度具有较好的一致性。此外，根据式（21）和（22），可计算异型盘与工件接触区域，可为机器人异型盘曲面磨削路径规划和离线编程提供理论基础。

4　机器人异型盘磨削实验平台实验验证

搭建机器人异型盘磨削实验平台，分别开展 1 种平面与 3 种曲率曲面工件的机器人接触力模型验证实验，验证所提方法，以及开展 1 种侧曲面圆台铸铁工件的机器人磨削一致性验证实验，基于磨削后工件表面磨削深度的一致性衡量所提方法的有效性。

4.1　机器人异型盘磨削实验平台搭建

以侧曲面圆台铸铁工件为实验对象，机器人异型盘实验平台如图 12 所示。使用 ABB IRB-4600 机器人作为实验系统位姿控制部件。使用 ATI 公司 Delta IP65 型力/力矩传感器，有效分辨率为 0.1 N。选用百马公司 BM-M8 型气动异型盘磨削工具，固定基座轴线到异型盘尖端距离为 90 mm，异型盘沿摆线路径以偏摆半径 3 mm 绕固定基座轴线摆动，轮廓半径为 175 mm，异型盘参数 m 为 135 mm，n 为 111 mm，橡胶材料的橡胶板厚度为 10 mm，ABS 塑料材料的薄板厚度为 2 mm。

4.2　机器人异型盘接触力模型验证实验

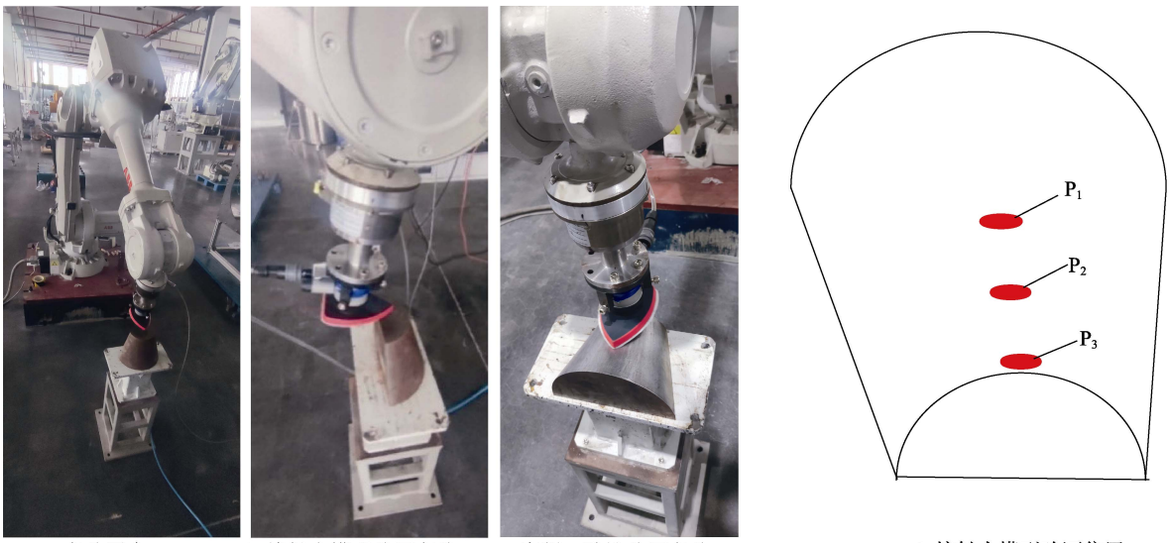
为验证所提接触力模型的有效性，开展 1 种平面与 3 种曲率曲面工件的机器人接触力模型验证实验，对本文提出的考虑廓形特征影响的包含薄板挠曲形变和橡胶板弹性形变的接触力建模方法（如式（31）所示）、实验测量结果和 Xiao 等[22]所提出的只考虑橡胶板弹性形变的接触力建模方法（如式（32）所示）进行对比分析。

$$h=3.01\theta^{0.677}\bar{R}^{-0.226}F^{0.451} \tag{32}$$

4.2.1　机器人异型盘平面接触力模型验证实验

在机器人异型盘实验平台上，对侧曲面圆台铸铁工件上平面开展接触力模型验证实验，如图 12b 所示。异型盘以盘倾角 6°、9°、12°、15°和 18°与工件接触，法向进给位移为 0~4.0 mm（逐次增加 0.5 mm），使用机器人示教器读取异型盘法向进给位移。通过控制器和编码器读取力/力矩传感器信号，每组实验重复测试 5 次。磨削路径进给方向 f 和主曲率方向 e_1 之间的夹角 ϕ 为 0°，使用式（23）计算异型盘与平面接触不同盘倾角对应等效半径 $\bar{R}$ 为 14.2、14.1、14.0、13.8、13.6 mm。

利用平面工件所提方法（式（31））和实验测量的接触力如图 13 所示。异型盘法向进给位移为 4 mm，当盘倾角为 6°、9°、12°、15°和 18°时，所提方法相



a 实验平台　b 接触力模型验证实验　c 磨削一致性验证实验　d 接触力模型验证位置

图 12　机器人异型盘磨削实验平台

Fig.12 Experimental platform of robotic special-shaped disc grinding: a) experimental platform; b) contact force model verification experiment; c) grinding consistency verification experiment; d) contact force model verification position

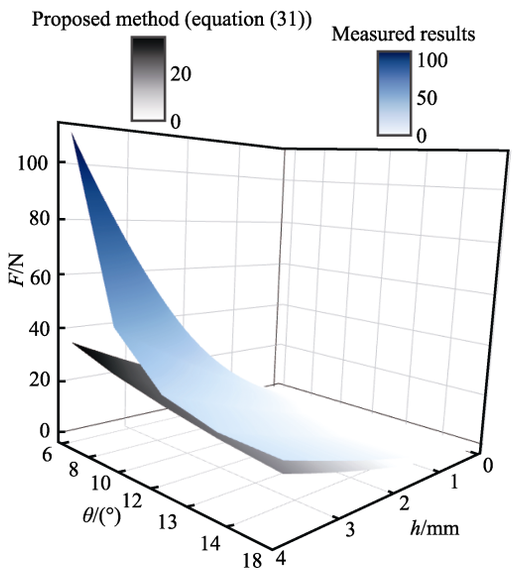


图 13　平面工件所提方法（式（31））和实验测量的接触力

Fig.13 Contact force on flat workpiece predicted by proposed method equation (31) and measured results

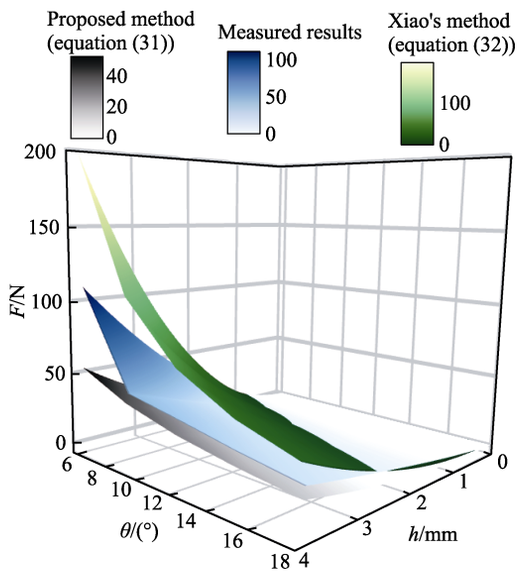


图 14　平面工件所提方法（式（31））与 Xiao 等所提方法（式（32））的接触力

Fig.14 Contact force on flat workpiece predicted by proposed method (equation (31)) and Xiao's method (equation (32))

对于实验测量结果的偏差分别为 79.8、17.0、3.4、1.9 和 3.9 N。当盘倾角（6°、9°）较小时，偏差较大。这是由于在建模过程中对弹性形变区域进行简化，假设接触区域符合小面积假设，因此当盘倾角较小致使实际接触面积较大、与小面积假设存在较大差异时，式（31）计算的接触力与实验结果产生的偏差较大。当盘倾角（12°、15°和 18°）较大时，利用式（31）计算的接触力与实验测量结果近似程度较高。

利用平面工件所提方法（式（31））和 Xiao 等方法（式（32））计算得到的接触力如图 14 所示。可知，Xiao 等方法（式（32））与实验测量结果具有相似的变化趋势，然而，在异型盘法向进给位移大于 2 mm 后对应接触力计算结果与实验测量结果存在较大偏差。以盘倾角 6°和异型盘法向进给位移 3.5 mm 为例，所提方法（式（31））、实验测量结果和 Xiao 等方法（式（32））对应接触力分别为 30.2、90.1 和 155.9 N，所提方法和 Xiao 等方法相较于实验测量结果的相对偏差分别为 66.5%和 73.0%，当盘倾角较小时，2 种方法与实验测量结果均有较大的相对偏差。此外，以盘倾角 12°和异型盘法向进给位移 3.5 mm 为例，所提方法（式（31））、实验测量结果和 Xiao 等方法（式（32））对应接触力分别为 20.6、24.0、55.1 N，所提方法和 Xiao 等方法相较于实验测量结果的相对偏差分别为 14.2%和 130%，当盘倾角较大时，所提方法

与实验测量结果更为相近。机器人异型盘平面模型实验验证了所提方法的有效性。

4.2.2　机器人异型盘曲面接触力模型验证实验

在如图 12d 所示的圆台铸铁工件侧曲面选择 3 个位置 P_1、P_2 和 P_3，开展接触力模型验证实验，所选择的 3 个位置对应主曲率半径依次分别为 85、65 mm 和 40 mm，盘倾角分别设置为 6°、9°、12°、15°和 18°，异型盘法向进给位移为 0~4.0 mm（逐次增加 0.5 mm），磨削路径方向 f 和主曲率方向 e_1 之间的夹角 ϕ 为 0°，每组实验重复测试 5 次。由式（23）依据主曲率半径、盘倾角和异型盘廓形参数计算得到等效半径 $\bar{R}$，如表 2 所示。

表 2　等效半径

Tab.2 Equivalent radii

mm

Radius of curvature/mm	Disc inclination angle/(°)				
	6	9	12	15	18
85	5.5	6.8	7.8	8.5	9.0
65	4.6	5.9	6.9	7.6	8.1
40	3.2	4.3	5.2	5.9	6.5

在圆台铸铁工件侧曲面的 3 个位置上，所提方法（式（31））、实验测量结果和 Xiao 等方法（式（32））对应接触力如图 15 所示。以盘倾角 6°和异型盘法向进给位移 3.5 mm 为例，所提方法、实验测量结果和 Xiao 等方法对应接触力如表 3 所示；所提方法的接触力相较于实验测量结果偏差分别为 28.5、44.5 和 34.5N，对应相对偏差分别为 52.5%、64.1%和 61.4%；Xiao 等方法的接触力相较于实验测量结果偏差分别为 42.5、15.1 和 20.4 N，对应相对偏差分别为 78.3%、21.8%和 36.3%。于是，当盘倾角较小时，2 种方法对应接触力与实验测量结果均有较大相对偏差。此外，以盘倾角 12°和异型盘法向进给位移 3.5 mm 为例，所提方法、实验测量结果和 Xiao 等方法对应接触力如表 4 所示；所提方法的接触力相较于实验测量结果偏差分别为 3.9、2.3 和 8.0 N，对应相对偏差分别为 20.7%、11.8%和 33.3%；Xiao 等方法的接触力相较于实验测量结果偏差分别为 18.8、18.8 和 9.3 N，对应相对偏差分别为 86.2%、96.4%和 38.8%。于是，当盘倾角较大时，所提方法与实验测量结果更为相近。机器人异型盘曲面接触力模型验证实验验证了所提方法的有效性。

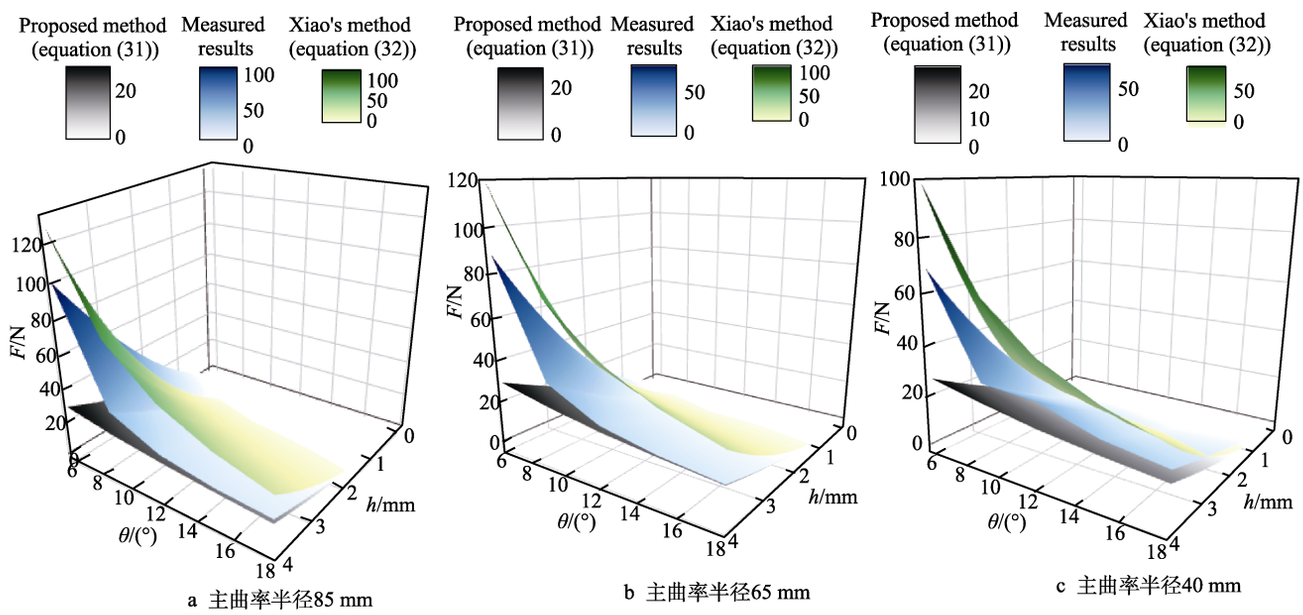


图 15　三处曲面接触力结果

Fig.15 Contact force results at three positions with different curvature radii: a) principal curvature radius of 85 mm; b) principal curvature radius of 65 mm; c) principal curvature radius of 40 mm

表 3　盘倾角 6°接触力对比结果

Tab.3 Contact force comparison results at disk inclination angle of 6°

Radius of curvature/mm	Contact force F/N		
	Proposed method (equation (31))	Measured results	Xiao's method (equation (32))
85	25.8	54.3	96.8
65	24.9	69.4	84.5
40	23.7	58.2	78.6

表 4　盘倾角 12°接触力对比结果

Tab.4 Contact force comparison results at disk inclination angle of 12°

Radius of curvature/mm	Contact force F/N		
	Proposed method (equation (31))	Measured results	Xiao's method (equation (32))
85	18.0	21.9	40.7
65	17.2	19.5	38.3
40	16.0	24.0	33.3

4.3　机器人异型盘磨削一致性验证实验

为进一步验证所提方法（式（31））的有效性，在机器人磨削实验平台对曲率均匀变化的侧曲面圆台铸铁工件表面开展恒定接触力的异型盘磨削实验。根据 Preston 理论[27]，磨削深度与接触力、磨削路径方向进给速度和 Preston 常数相关。于是，当磨削路径方向进给速度、Preston 常数以及其他磨削参数恒定时，通过保持接触区域的接触力恒定，可以得到一致性较好的工件表面和磨削深度。

在侧曲面圆台上，基于式（31）及磨削路径上不同位置的主曲率半径，计算异型盘法向进给位移并作为在工件表面恒力磨削的规划依据。在机器人磨削路径不同位置，通过调节异型盘法向进给位移来保证接触力恒定，恒定接触力磨削方式示意图如图 16 所示。j 为异型盘法向进给位移方向，它与工件表面法向方向相反，f 为磨削路径方向。磨削后采用高精度三维扫描测量仪测量工件表面磨削深度，通过工件表面磨削深度的一致性验证所提方法。

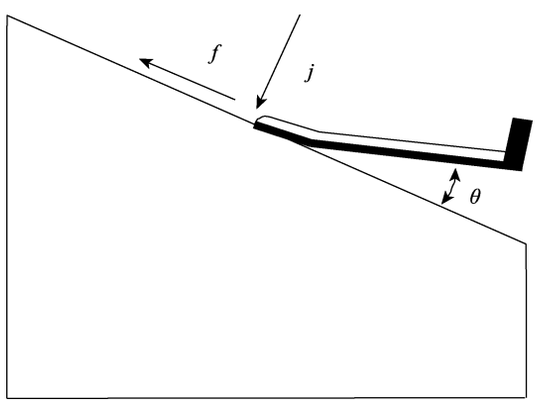


图 16　恒定接触力磨削方式示意图
Fig.16 Schematic diagram of constant contact force grinding mode

磨削实验中的磨削参数如表 5 所示，磨削接触力设定为 20 N。依据设置的异型盘磨削路径方向进给速度、摆动转速、砂纸粒度、盘倾角和等效半径等参数，在圆台工件侧曲面上通过式（31）即可计算规划出异型盘法向进给位移。如图 16 所示，沿磨削路径方向工件表面主曲率半径由右到左为 40~200 mm 均匀变化，计算对应的等效半径为 5.2~10.5 mm。通过式（31）计算不同主曲率半径的位置点处对应规划的异型盘法向进给位移为 3.98~3.57 mm。

表 5　异型盘磨削参数
Tab.5 Grinding parameters of special-shaped disc

Essential factor	Parameter
Feed speed in grinding path direction/(mm·s^{-1})	15
Swinging speed/(r·min^{-1})	10 000
Eccentricity/mm	3
Grit size of sandpaper/grit	240
Contact force/N	20
Disc inclination angle/(°)	12
Equivalent radius/mm	5.2-10.5

在工件表面上选取磨削接触区域互不重叠的 3 条路径进行机器人异型盘恒定接触力磨削实验。以基恩士 VL-550 型高精度三维扫描测量仪为磨削实验测量平台，测量精度为 0.01 mm。每条磨削路径上以均匀等间隔测量 5 个位置磨削深度，磨削实验后磨削深度测量结果如图 17 所示。3 条磨削路径的磨削深度测量结果如表 6 所示。

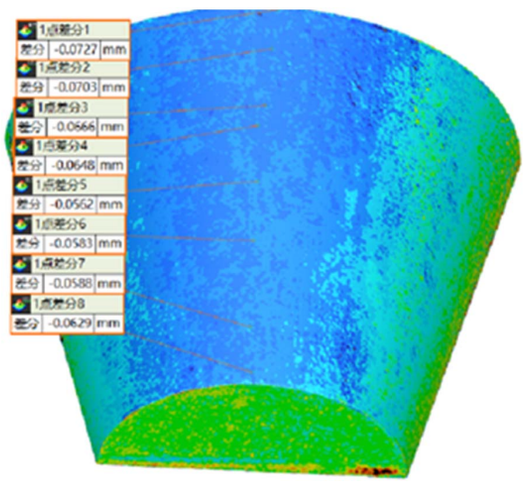


图 17　磨削深度实验测量结果
Fig.17 Grinding depth experiment measurement results

表 6　工件表面磨削深度测量结果
Tab.6 Measurement results of workpiece surface grinding depth

Path number	Grinding depth/mm				
1	0.072 7	0.070 3	0.066 6	0.058 8	0.062 9
2	0.061 9	0.060 0	0.064 1	0.067 2	0.062 6
3	0.064 8	0.069 1	0.066 8	0.063 4	0.058 3

定义最大偏差与平均值的比为变异系数。磨削深度进一步分析结果如表 7 所示。在如表 5 所示的相同磨削参数工况下，路径 1、2、3 磨削深度的平均值分别为 0.066 3、0.063 2、0.064 5 mm，方差分别为 0.000 031 2、0.000 007 3、0.000 016 5 mm^2，最大偏差分别为 0.013 9、0.009 0、0.010 8 mm，变异系数分别为 11.2%、6.4% 和 9.6%。实验结果表明，经机器人异型盘以恒定接触

表 7　磨削深度数据分析结果
Tab.7 Grinding depth data analyses results

Path number	Average/mm	Variance/mm^2	Maximum deviation/mm	Coefficient of variation/%
1	0.066 3	0.000 031 2	0.013 9	11.2
2	0.063 2	0.000 007 3	0.009 0	6.4
3	0.064 5	0.000 016 5	0.010 8	9.6

力磨削后，工件表面具有较高的一致性，验证了所提方法的有效性。

5　结论

针对机器人磨削用异型盘具有的尖端小、接触压力大的特征以及接触区域相同磨削速度的偏心摆动磨削作业特点，提出一种考虑廓形特征影响的包含薄板挠曲形变和橡胶板弹性形变的机器人异型盘磨削接触力建模方法，研究机器人异型盘磨削接触力与法向进给位移及异型盘廓形参数、异型盘倾角、工件表面曲率、接触区域等关系。研究结果可为机器人异型盘偏心摆动磨削的作业任务规划、工件宏观表面材料去除分析及机器人磨削作业系统的集成应用等机器人异型盘的高效率、高质量恒定接触力磨削提供理论依据。

1）基于异型盘廓形特征与薄板及橡胶板双层结构形式，提出一种考虑廓形特征影响的包含薄板挠曲形变和橡胶板弹性形变的机器人异型盘磨削接触力建模方法，分析磨削接触力与薄板挠曲形变关系，建立橡胶板弹性形变的封闭形式磨削接触力模型，并通过有限元数值模拟实验求解橡胶板弹性形变参数和薄板挠曲形变参数，建立磨削接触力与异型盘法向进给位移数值形式反函数模型。

2）搭建机器人异型盘磨削实验平台，分别开展 1 种平面与 3 种曲率曲面工件的机器人异型盘接触力模型验证实验，通过对比所提方法、实验测量和 Xiao 等方法对应的接触力可知，当盘倾角较小时，所提方法和 Xiao 等方法相较于实验测量结果均有较大的相对偏差，当盘倾角较大时，所提方法与实验测量结果更为相近，实验验证了所提方法的有效性。

3）开展 1 种侧曲面圆台铸铁工件的机器人异型盘磨削一致性验证实验，在相同的磨削参数条件下，3 条磨削路径（路径 1、2、3）的磨削深度平均值分别为 0.066 3、0.063 2、0.064 5 mm，最大偏差分别为 0.013 9、0.009 0、0.010 8 mm，变异系数分别为 11.2%、6.4%和 9.6%，实验结果表明，经机器人异型盘恒定接触力磨削后，工件表面具有较高的一致性，验证了所提方法的有效性。

参考文献：

[1] 程淼, 陈松, 徐进文, 等. 基于廓形识别的弯管内表面精密磨削试验研究[J]. 表面技术, 2021, 50(11): 372-382.
CHENG M, CHEN S, XU J W, et al. Experimental Research on Precision Grinding of Inner Surface of Elbow Based on Profile Recognition[J]. Surface Technology, 2021, 50(11): 372-382.

[2] MENG Q Y, GUO B, ZHAO Q L, et al. Modelling of Grinding Mechanics: A Review[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2023, 36(7): 25-39.

[3] SONG K K, XIAO G J, CHEN S L, et al. A New Force-Depth Model for Robotic Abrasive Belt Grinding and Confirmation by Grinding of the Inconel 718 Alloy[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2023, 80: 102483.

[4] 吴昌林, 丁和艳, 陈义. 材料去除深度与磨粒的关系建模方法研究[J]. 中国机械工程, 2011, 22(3): 300-304.
WU C L, DING H Y, CHEN Y. Research on Modeling Method of Relation between Abrasive Grain and Material Removal Depth[J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(3): 300-304.

[5] 罗来臻, 赵欢, 王辉, 等. 复杂曲面机器人磨抛位姿优化与刀路规划[J]. 机械工程学报, 2022, 58(3): 284-294.
LUO L Z, ZHAO H, WANG H, et al. Pose Optimization and Tool Path Planning for Robotic Grinding of Complicated Curved Surface[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(3): 284-294.

[6] 张伟健, 巩亚东, 赵旭, 等. 砂带表面形貌测量与评价研究[J]. 东北大学学报, 2022, 43(9): 1277-1282.
ZHANG W J, GONG Y D, ZHAO X, et al. Investigation on the Measurement and Evaluation of Abrasive Belt Surface Morphology[J]. Journal of Northeastern University, 2022, 43(9): 1277-1282.

[7] 卢耀安, 陈守峰, 王成勇. 鼓形铣刀侧铣加工叶盘叶片曲面的光顺刀具路径生成方法[J]. 机械工程学报, 2022, 58(1): 256-266.
LU Y A, CHEN S F, WANG C Y. Smooth Flank Milling Tool Path Generation for Blisk Surface with Barrel Cutters[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(1): 256-266.

[8] 李杰, 杨泽源, 时强胜, 等. 基于小样本数据驱动模型的橡胶材料机器人磨抛去除廓形预测方法[J]. 机械工程学报, 2022, 58(14): 15-24.
LI J, YANG Z Y, SHI Q S, et al. Small Sample Data-Driven Model for Material Removal Profile Prediction in Robotic Grinding of Rubber[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(14): 15-24.

[9] JOHNSON K L. Contact Mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[10] ZHANG L, TAM H Y, YUAN C M, et al. An Investigation of Material Removal in Polishing with Fixed Abrasives[J]. Journal of Engineering Manufacture, 2002, 216: 103-112.

[11] AZAD M, FEATHERSTONE R. A New Nonlinear Model of Contact Normal Force[J]. IEEE Transactions on Robo-

tics, 2014, 30(3): 736-739.

[12] 黄智, 董华章, 周振武, 等. 砂带磨削 TC4 磨削力数字建模及其预测[J]. 表面技术, 2018, 47(9): 250-258.
HUANG Z, DONG H Z, ZHOU Z W, et al. Modeling and Prediction of Grinding Force on Belt Grinding TC4[J]. Surface Technology, 2018, 47(9): 250-258.

[13] 樊文刚, 程继发, 吴月峰, 等. 基于内凹型接触轮的钢轨砂带打磨静态接触行为与仿真研究[J]. 机械工程学报, 2018, 54(14): 152-158.
FAN W G, CHENG J F, WU Y F, et al. Research on Static Contact Behavior and Simulation for Rail Grinding by Abrasive Belt Based on Concave Type Contact Wheel[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(14): 152-158.

[14] 陈庚, 向华, 叶寒, 等. 考虑法向接触力变化的机器人砂带磨削参数研究[J]. 中国机械工程, 2023, 34(7): 803-811.
CHEN G, XIANG H, YE H, et al. Research on Robot Abrasive Belt Grinding Parameters Considering the Change of Normal Contact Force[J]. China Mechanical Engineering, 2023, 34(7): 803-811.

[15] CAO Z C, CHEUNG C F. Multi-Scale Modeling and Simulation of Material Removal Characteristics in Computer-Controlled Bonnet Polishing[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016, 106: 147-156.

[16] XYDAS N, KAO I. Modeling of Contact Mechanics and Friction Limit Surfaces for Soft Fingers in Robotics with Experimental Results[J]. International Journal of Robotics Research, 1999, 18: 941-950.

[17] ULRICH B J, SRIVASTAVA A K, ELBESTAWI M A. Analysis of the Robotic Disc Grinding Process[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 1992, 7(2): 82-92.

[18] WHITNEY D E, TUNG E D. Robot Grinding and Finishing of Cast Iron Stamping Dies[J]. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 1992, 114(1): 132-140.

[19] TSAI M J, HUANG J F, KAO W L. Robotic Polishing of Precision Molds with Uniform Material Removal Control[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2009, 49(11): 885-895.

[20] FENG D Y, SUN Y W, DU H P. Investigations on the Automatic Precision Polishing of Curved Surfaces Using a Five-Axis Machining Centre[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2014, 72(9): 1625-1637.

[21] WANG Q H, LIANG Y J, XU C Y, et al. Generation of Material Removal Map for Freeform Surface Polishing with Tilted Polishing Disk[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2019, 102(9): 4213-4226.

[22] XIAO M B, DING Y, FANG Z J, et al. Contact Force Modeling and Analysis for Robotic Tilted-Disc Polishing of Freeform Workpieces[J]. Precision Engineering, 2020, 66: 188-200.

[23] 冯煜, 陈小安, 王朝兵, 等. 塔式太阳能定日镜镜面挠曲变形研究[J]. 太阳能学报, 2015, 36(9): 2182-2188.
FENG Y, CHEN X A, WANG C B, et al. Research on Flexure Deformation of Heliostat Reflector of Tower Solar Power[J]. Acta Energiae Solaris Sinica, 2015, 36(9): 2182-2188.

[24] 黄钟民, 谢臻, 张易申, 等. 面内变刚度薄板弯曲问题的挠度-弯矩耦合神经网络方法[J]. 力学学报, 2021, 53(9): 2541-2553.
HUANG Z M, XIE Z, ZHANG Y S, et al. Deflection-Bending Moment Coupling Neural Network Method for the Bending Problem of Thin Plates with in-Plane Stiffness Gradient[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(9): 2541- 2553.

[25] TAPP K. Differential Geometry of Curves and Surfaces[M]. Switzerland: Springer International Publishing, 2016.

[26] INOUE T, HIRAI S. Elastic Model of Deformable Fingertip for Soft-fingered Manipulation[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2006, 22(6): 1273-1279.

[27] PRESTON F W. The Theory and Design of Plate Glass Polishing Machines[J]. Journal of the Society of Glass Technology, 1927, 11: 214-256.