

# 次表面偏折裂纹尖端力学行为的分布位错理论分析

张雪朋, 李文俊, 李楠, 江晓禹

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

**摘要:** **目的** 在复杂载荷作用下, 采用理论方法求解半无限大平面内次表面偏折裂纹的力学性质。**方法** 根据叠加原理把问题分成两部分, 其一采用弹性力学, 其二采用分布位错原理, 并利用 Gauss-Chebyshev 数值求解法进行求解, 二者联合求解力学参量。**结果** 得到了偏折裂纹在相应偏折角下, 不同深度、长度比、载荷比对裂纹尖端应力强度因子 (SIF) 的影响曲线, 并分析在此工况下裂纹的扩展方向。应力强度因子, 会随着偏折部分长度的增加而增大, 随着裂纹埋置深度的增加而减小, 随着裂纹横、剪载荷比的增加而增大。裂纹会沿着顺时针方向扩展并随着偏折角的增大而增大, 靠近表面的一侧更容易发生扩展。**结论** 载荷比、裂纹埋置深度以及长度比较大时, 裂纹更容易向表面扩展, 从而形成开放裂纹, 裂纹沿着顺时针方向扩展, 且随偏折角的改变而改变。

**关键词:** 扩展方向; 偏折裂纹; 分布位错; 应力强度因子; 偏折角

**中图分类号:** O346.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3660(2021)12-0149-10

**DOI:** 10.16490/j.cnki.issn.1001-3660.2021.12.015

## Theoretical Analysis of Distributed Dislocations on the Mechanical Behavior of Subsurface Deflection Crack Tip

ZHANG Xue-peng, LI Wen-jun, LI Nan, JIANG Xiao-yu

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**ABSTRACT:** Under complex loads, theoretical methods are used to solve the mechanical properties of subsurface deflection cracks in a semi-infinite plane. The problem included two parts according to the method we followed, the superposition theorem. One used elastic mechanics; the other used the principle of distributed dislocation. And Gauss-Chebyshev numerical solution method was used to solve. The two were jointly used to solve the mechanical parameters. SIF graphs of the crack tip at all kinds of load ratios of the deflection, depths and length ratios cracks at the corresponding deflection angles were obtained, and the crack propagation direction under this working condition was analyzed. SIF increased with the increase of the length of the deflection part, SIF decreased as the depth of the crack buried increased; and when the ratio of transverse crack and shearing load grew, the SIF also increased. When the crack was closer to the surface, it was easier to expand and grow with the increase of the deflection angle in the clockwise direction. When the load ratio, crack embedding depth, and length are relatively large, the cracks are more likely to propagate to the surface to form open cracks, the cracks are propagated in a clockwise direction and

收稿日期: 2020-10-08; 修订日期: 2021-07-26

Received: 2020-10-08; Revised: 2021-07-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11472230)

Fund: Supported by the National Natural Science Foundation of China (11472230)

作者简介: 张雪朋 (1995—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为疲劳与断裂。

Biography: ZHANG Xue-peng (1995—), Male, Master, Research focus: fatigue and fracture.

通讯作者: 江晓禹 (1965—), 男, 博士, 教授, 研究方向为复合材料力学和接触疲劳。

Corresponding author: JIANG Xiao-yu (1965—), Male, Doctor, Professor, Research focus: mechanics of composite materials and contact fatigue.

引文格式: 张雪朋, 李文俊, 李楠, 等. 次表面偏折裂纹尖端力学行为的分布位错理论分析[J]. 表面技术, 2021, 50(12): 149-158.

ZHANG Xue-peng, LI Wen-jun, LI Nan, et al. Theoretical analysis of distributed dislocations on the mechanical behavior of subsurface deflection crack tip[J]. Surface technology, 2021, 50(12): 149-158.

varies with the deflection angle.

**KEY WORDS:** propagation direction; deflection crack; distributed dislocation; stress intensity factor; deflection angle

大多数情况下,材料断裂是由于裂纹扩展导致的,这是一种非常危险的失效方式。裂纹在材料内部或表面萌生之后发生扩展,使得材料失效,甚至断裂<sup>[1-2]</sup>。对于材料中的裂纹,其尖端部位最危险。裂纹中的主要应力集中在裂纹尖端<sup>[3]</sup>。材料的抗断裂性和疲劳强度会受到裂纹几何特征等方面的影响。当裂纹的尺寸与材料的特征长度相当时,这种现象尤其明显(如金属材料中的晶粒尺寸,脆性材料中的微空隙或夹杂物)。它可以用来量化材料的断裂强度<sup>[4]</sup>。

在外部受到载荷或材料内部缺陷的影响下,裂纹扩展偏离其原始方向并出现偏折。偏折裂纹在裂纹扩展中经常出现,许多学者研究了偏折裂纹的力学问题<sup>[3]</sup>。G. R. MILLER<sup>[5]</sup>分析了表面压载荷作用下水平次表面裂纹分支行为,其中包含埋置偏折裂纹。D. J. MUKAI<sup>[6]</sup>采用复杂变量二维弹性方程,分析了刚性圆柱压头下次表面偏折裂纹。H. G. BEOM等<sup>[7]</sup>研究了不同各向异性材料在反平面变形作用下弯曲界面裂纹的渐近问题。K. K. LO研究了包含偏折裂纹在内的非对称分支裂纹、对称分支裂纹和双对称分支裂纹等问题<sup>[8]</sup>。N. HALLBÄCK等人<sup>[9]</sup>分析了弹性半平面中存在多扭结裂纹的情况。XIE等人<sup>[10]</sup>研究了在拉伸条件下裂纹偏折和分支的理论说明。CHEN<sup>[11]</sup>采用权函数法估算了偏折裂纹尖端应力强度因子。LI等人<sup>[12]</sup>研究了拉伸载荷条件下的单裂纹、边扭结裂纹和双扭结裂纹。JIN等人<sup>[13]</sup>研究了在移动赫兹作用下,用半无限平面内的多偏折次表面裂纹模拟充液地下裂纹生长规律的数值结果。JIN等人<sup>[14]</sup>利用分布位错的方法,解决了含有多边裂纹的弹性半平面的数值解。LI等人<sup>[15]</sup>采用分布位错,求解在拉伸条件下无限平面内微裂纹与主裂纹长度比主裂纹扩展的影响。D. A. Hills<sup>[16]</sup>和 LI<sup>[17-18]</sup>分析了在均匀拉伸作用下半无限平面内一个或多个角不连续的直段二维裂纹的应力强度因子,但是要求其裂纹必需保持全部张开,且裂纹都是在特定的角度下求解的。分布位错法是解决裂纹问题的一种有效方法,其核心是用连续分布的位错等价地替换裂纹<sup>[16]</sup>。

上述学者分别采用了复变函数法、权函数法以及分布位错法解决各种裂纹问题,考虑了在无限平面内、半无限平面内、单个偏折裂纹、多重偏折裂纹、裂纹尖端应力场、塑性区等问题,多数研究是基于无限平面内裂纹。但在实际应用上不可能出现无限平面的情况,而在半无限平面内,关于偏折裂纹的研究相对较少。本文考虑了半无限平面内的埋入偏折裂纹在复杂载荷作用下裂纹尖端的力学性质以及偏折裂纹的扩展方向,对比裂纹长度比、埋置深度、载荷比对

裂纹尖端应力强度因子以及偏折裂纹扩展方向的影响,为以后求解裂纹扩展方向及路径提供参考。

## 1 理论求解

### 1.1 叠加原理

利用分布位错方法和叠加原理可以将图1所示的裂纹转化为两个子问题:(1)在一个半无限平面内,没有外载荷作用下,含有两列位错的问题;(2)只受均匀外载荷的平面应力问题<sup>[1]</sup>。通过叠加原理,将二者联立,从而可求得其模型的应力组合状态:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \tilde{\sigma}_{ij}(x, y) + \bar{\sigma}_{ij}(x, y) \quad (ij = xx, xy, yy) \quad (1)$$

$$\tilde{\sigma}_{yy}(x, y) = \sigma^\infty, \tilde{\sigma}_{xy}(x, y) = \tau^\infty, \tilde{\sigma}_{xx}(x, y) = 0 \quad (2)$$

式中: $\tilde{\sigma}_{ij}(x, y)$ 为半无限平面承受的均匀拉伸以及剪切载荷, $\sigma^\infty$ 为拉力载荷, $\tau^\infty$ 为剪切载荷<sup>[17]</sup>。

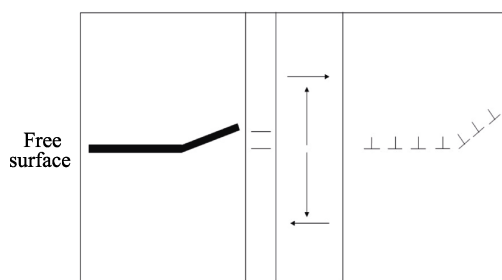


图1 叠加原理示意图

Fig.1 Schematic diagram of superposition principle

对问题进行求解,将偏折裂纹上的两列位错分别建立坐标系 $x-o-y$ 和 $\hat{x}-\hat{o}-\hat{y}$ ,分别表示为“1”和“2”,并利用 $d$ 和 $\alpha$ 来表示它们之间的未知关系, $d$ 表示主裂纹中点到半无限边界的距离, $\alpha$ 表示偏折角度。将 $\alpha$ 的正方向设置为逆时针。其示意图见图2。

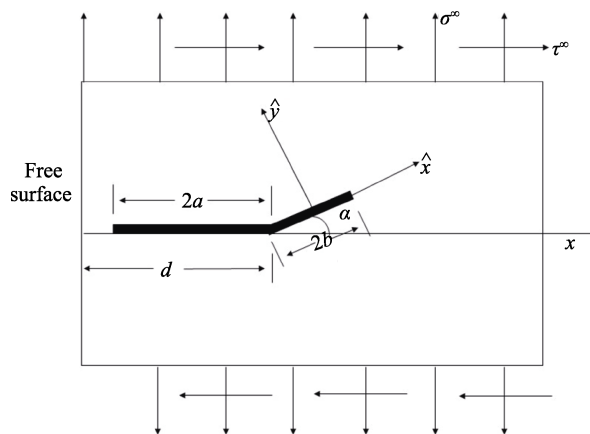


图2 半无限平面内埋入偏折裂纹

Fig.2 Deflection cracks embedded in the half-infinite plane

## 1.2 建立位错密度积分方程

在半无限大平面内, 位于坐标系  $x-o-y$  内的位错产生的应力场可以表示为<sup>[18-23]</sup>:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{xx}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} [b_x G_{xxx}(\xi, x, y) + b_y G_{yxx}(\xi, x, y)] \\ \bar{\sigma}_{xy}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} [b_x G_{xyx}(\xi, x, y) + b_y G_{yyx}(\xi, x, y)] \\ \bar{\sigma}_{yy}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} [b_x G_{xyy}(\xi, x, y) + b_y G_{yyy}(\xi, x, y)] \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} G_{xxx}(\xi, x, y) = y \left[ -\frac{1}{r_1^2} - \frac{2x_1^2}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2x_2^2}{r_2^4} - \frac{4\xi x_2}{r_2^4} + \frac{4\xi^2}{r_2^4} + \frac{16\xi x_2^3}{r_2^6} - \frac{16\xi^2 x_2^2}{r_2^6} \right] \\ G_{xyx}(\xi, x, y) = y \left[ -\frac{1}{r_1^2} + \frac{2x_1^2}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{2x_2^2}{r_2^4} + \frac{12\xi x_2}{r_2^4} - \frac{4\xi^2}{r_2^4} - \frac{16\xi x_2^3}{r_2^6} + \frac{16\xi^2 x_2^2}{r_2^6} \right] \\ G_{xyy}(\xi, x, y) = -\frac{x_1}{r_1^2} + \frac{2x_1^3}{r_1^4} + \frac{x_2}{r_2^2} - \frac{2x_2^3}{r_2^4} + \frac{16\xi x_2^2}{r_2^4} - \frac{12\xi^2 x_2}{r_2^4} - \frac{16\xi x_2^4}{r_2^6} + \frac{16\xi^2 x_2^3}{r_2^6} \\ G_{yxx}(\xi, x, y) = -\frac{x_1}{r_1^2} + \frac{2x_1^3}{r_1^4} + \frac{x_2}{r_2^2} - \frac{2x_2^3}{r_2^4} - \frac{8\xi x_2^2}{r_2^4} + \frac{12\xi^2 x_2}{r_2^4} + \frac{16\xi x_2^4}{r_2^6} - \frac{16\xi^2 x_2^3}{r_2^6} \\ G_{yyx}(\xi, x, y) = \frac{3x_1}{r_1^2} - \frac{2x_1^3}{r_1^4} - \frac{3x_2}{r_2^2} - \frac{2x_2^3}{r_2^4} + \frac{16\xi x_2^2}{r_2^4} - \frac{12\xi^2 x_2}{r_2^4} - \frac{16\xi x_2^4}{r_2^6} + \frac{16\xi^2 x_2^3}{r_2^6} \\ G_{yyy}(\xi, x, y) = y \left[ -\frac{1}{r_1^2} + \frac{2x_1^2}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{2x_2^2}{r_2^4} - \frac{4\xi x_2}{r_2^4} + \frac{4\xi^2}{r_2^4} - \frac{16\xi x_2^3}{r_2^6} - \frac{16\xi^2 x_2^2}{r_2^6} \right] \end{cases} \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^{11}(x) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} [b_x G_{xij}^{11}(\xi, x, 0) + b_y G_{yij}^{11}(\xi, x, 0)] \quad (ij = xx, xy, yy) \quad (5)$$

式中:  $r_1^2 = x_1^2 + y^2$ ,  $r_2^2 = x_2^2 + y^2$ ,  $x_1 = x - \xi$ ,  $x_2 = x + \xi$ ,  $G_{xij}^{11}(\xi, x, 0)$  和  $G_{yij}^{11}(\xi, x, 0)$  表示位错列“1”处的位错对位错列“1”的影响函数。

由以上可进一步得到位错列“1”处的位错在位错列“2”上产生的应力。首先将坐标系  $x-o-y$  转化到坐标系  $\hat{x}-\hat{o}-\hat{y}$  中, 其推导过程大致如下:

$$\begin{cases} x = (a+d) + b\cos\alpha + \hat{x}\cos\alpha - \hat{y}\sin\alpha \\ y = b\sin\alpha + \hat{x}\sin\alpha + \hat{y}\cos\alpha \end{cases} \quad (6)$$

利用以上公式将两个坐标系关联起来, 之后利用摩尔应力圆将坐标系  $x-o-y$  下的应力旋转到坐标系  $\hat{x}-\hat{o}-\hat{y}$  下, 位错在坐标系  $\hat{x}-\hat{o}-\hat{y}$  下产生的应力场可以表示为<sup>[16]</sup>:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{\hat{x}\hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} [b_x G_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}(\xi, \hat{x}, \hat{y}) + b_y G_{\hat{y}\hat{x}\hat{x}}(\xi, \hat{x}, \hat{y})] \\ \bar{\sigma}_{\hat{x}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} [b_x G_{\hat{x}\hat{x}\hat{y}}(\xi, \hat{x}, \hat{y}) + b_y G_{\hat{y}\hat{x}\hat{y}}(\xi, \hat{x}, \hat{y})] \\ \bar{\sigma}_{\hat{y}\hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} [b_x G_{\hat{x}\hat{y}\hat{y}}(\xi, \hat{x}, \hat{y}) + b_y G_{\hat{y}\hat{y}\hat{y}}(\xi, \hat{x}, \hat{y})] \end{cases} \quad (7)$$

其中, 坐标转换后的影响函数推导过程如下<sup>[16]</sup>:

式中:  $\mu$  表示剪切模量<sup>[18]</sup>;  $\kappa$  是 Kolosov 常数<sup>[24]</sup>,  $\kappa = 3 - 4\nu$  为平面应变状态<sup>[24]</sup>,  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  为平面应力状态<sup>[25-26]</sup>;  $b_x$  和  $b_y$  是刃型位错博格斯矢量在  $x$  和  $y$  方向上的分量;  $G_{ijk}$  表示影响函数, 其中  $i$  表示博格斯矢量分量方向,  $j, k$  表示应力分量方向<sup>[16,27]</sup>, 其表达式见式(4)。位错列“1”处的位错在位错列“1”上产生的应力见式(5)。

$$\begin{cases} G_{\hat{x}\hat{x}\hat{x}}(\xi, \hat{x}, \hat{y}) = G_{\hat{x}\hat{x}}(\xi, x, y)\cos^2\alpha + G_{\hat{y}\hat{y}}(\xi, x, y)\sin^2\alpha + G_{\hat{x}\hat{y}}(\xi, x, y)\sin 2\alpha \\ G_{\hat{x}\hat{x}\hat{y}}(\xi, \hat{x}, \hat{y}) = G_{\hat{x}\hat{x}}(\xi, x, y)\sin^2\alpha + G_{\hat{y}\hat{y}}(\xi, x, y)\cos^2\alpha - G_{\hat{x}\hat{y}}(\xi, x, y)\sin 2\alpha \\ G_{\hat{y}\hat{y}\hat{y}}(\xi, \hat{x}, \hat{y}) = [G_{\hat{y}\hat{y}}(\xi, x, y) - G_{\hat{x}\hat{x}}(\xi, x, y)]\sin\alpha\cos\alpha + G_{\hat{x}\hat{y}}(\xi, x, y)\cos 2\alpha \end{cases} \quad i = x, y \quad (8)$$

令  $\hat{y} = 0$ , 可以得到位错列“1”处的位错在位错列“2”上产生的应力, 其公式为:

$$\bar{\sigma}_{ij}(\hat{x}) = \frac{2\mu}{\pi(1+\kappa)} [b_x G_{xij}^{12}(\xi, \hat{x}, 0) + b_y G_{yij}^{12}(\xi, \hat{x}, 0)] \quad (ij = \hat{x}\hat{y}, \hat{y}\hat{y}, \hat{x}\hat{x}) \quad (9)$$

利用此方法可以得到应力  $\bar{\sigma}_{ij}^{22}(\hat{x})$  以及应力  $\bar{\sigma}_{ij}^{21}(\hat{x})$ , 故所求的应力分量已经求出。利用两个位错列进行积分, 可以得到偏折裂纹上位错产生的应力, 其位错列“1”和“2”的应力可以表示为:

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{xy}(x) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{d-a}^{d+a} [B_x(\xi) G_{xyx}^{11}(\xi, x, 0) + B_y(\xi) G_{xyy}^{11}(\xi, x, 0)] d\xi + \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-b}^b [B_{\hat{x}}(\hat{\xi}) G_{\hat{x}\hat{x}\hat{y}}^{21}(\hat{\xi}, x, 0) + B_{\hat{y}}(\hat{\xi}) G_{\hat{y}\hat{x}\hat{y}}^{21}(\hat{\xi}, x, 0)] d\hat{\xi} \\ \bar{\sigma}_{yy}(x) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{d-a}^{d+a} [B_x(\xi) G_{yyx}^{11}(\xi, x, 0) + B_y(\xi) G_{yyy}^{11}(\xi, x, 0)] d\xi + \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-b}^b [B_{\hat{x}}(\hat{\xi}) G_{\hat{x}\hat{y}\hat{y}}^{21}(\hat{\xi}, x, 0) + B_{\hat{y}}(\hat{\xi}) G_{\hat{y}\hat{y}\hat{y}}^{21}(\hat{\xi}, x, 0)] d\hat{\xi} \end{cases} \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_{xy}(\hat{x}) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{d-a}^{d+a} [B_x(\xi)G_{xy}^{12}(\xi, \hat{x}, 0) + B_y(\xi)G_{xy}^{12}(\xi, \hat{x}, 0)]d\xi + \\ &\quad \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-b}^b [B_x(\hat{\xi})G_{xy}^{22}(\hat{\xi}, \hat{x}, 0) + B_y(\hat{\xi})G_{xy}^{22}(\hat{\xi}, \hat{x}, 0)]d\hat{\xi} \\ \bar{\sigma}_{yy}(\hat{x}) &= \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{d-a}^{d+a} [B_x(\xi)G_{yy}^{12}(\xi, \hat{x}, 0) + B_y(\xi)G_{yy}^{12}(\xi, \hat{x}, 0)]d\xi + \\ &\quad \frac{2\mu}{\pi(\kappa+1)} \int_{-b}^b [B_x(\hat{\xi})G_{yy}^{22}(\hat{\xi}, \hat{x}, 0) + B_y(\hat{\xi})G_{yy}^{22}(\hat{\xi}, \hat{x}, 0)]d\hat{\xi} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

式中:  $B(\xi)$  为位错密度在“1”位错列,  $B(\hat{\xi})$  为位错密度在“2”位错列。至此, 两个子问题已经求解完成, 对于图 1 所示的问题, 必须确保裂纹面是无牵引的, 其方程为:

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\sigma}_{ij}(x) + \bar{\sigma}_{ij}(x) &= 0 \quad d-a < x < d+a \quad (ij = xy, yy) \\ \bar{\sigma}_{ij}(\hat{x}) + \bar{\sigma}_{ij}(\hat{x}) &= 0 \quad -b < \hat{x} < b \quad (ij = \hat{x}\hat{y}, \hat{y}\hat{y}) \end{aligned} \right. \quad (12)$$

## 2 数值求解位错密度积分方程

将式(10) — (11) 代入式(12), 建立积分方程, 但积分方程较难求解, 因此改用高斯切比雪夫求积法<sup>[19-20]</sup>来进行数值求解。将积分区域 $[d-a, d+a]$ 和 $[-b, b]$ 无量纲化到 $[-1, 1]$ , 其推导过程根据文献[16]的推导方法:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{(d-a) + (d+a) + s_I \times [(d+a) - (d-a)]}{2} \\ x &= \frac{(d-a) + (d+a) + t_k \times [(d+a) - (d-a)]}{2} \\ \hat{\xi} &= b \times \hat{s}_I \\ \hat{x} &= b \times \hat{t}_k \end{aligned} \right. \quad (13)$$

其中  $N$  个离散积分点  $s_I$ 、 $\hat{s}_I$  和  $N-1$  个相应的配置点  $t_k$ 、 $\hat{t}_k$  可以从文献[16]中得到, 其具体情况如文献[16]中情况一, 主裂纹两端都是奇异的, 同理, 偏折裂纹也是如此。故根据文献[16]得到:

$$\left\{ \begin{aligned} s_I = \hat{s}_I &= \cos \frac{\pi(2i-1)}{2N} \quad (i=1, 2, \dots, N) \\ t_k = \hat{t}_k &= \cos \frac{\pi k}{N} \quad (i=1, 2, \dots, N-1) \end{aligned} \right. \quad (14)$$

将偏折裂纹当成是由几段直裂纹组成的, 只需保证拐点处的连续性即可, 这样的简化已经被证明是合理的<sup>[21]</sup>。两段的每一端都是奇异的, 位错密度亦是, 将  $B_i(s)$  当作基本函数主裂纹  $\omega(s)$  与主裂纹未知函数  $\phi(s)$  的乘积<sup>[22]</sup>, 从文献[16]中得到位错密度函数:

$$\left\{ \begin{aligned} B_x(s) &= \frac{\phi_x(s)}{\sqrt{1-s^2}} \\ B_y(s) &= \frac{\phi_y(s)}{\sqrt{1-s^2}} \end{aligned} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_x(\hat{s}) &= \frac{\phi_x(\hat{s})}{\sqrt{1-\hat{s}^2}} \\ B_y(\hat{s}) &= \frac{\phi_y(\hat{s})}{\sqrt{1-\hat{s}^2}} \end{aligned} \right. \quad (16)$$

其离散化线性方程组为:

$$\left\{ \begin{aligned} -\bar{\sigma}_{xy}(t_k) \frac{\kappa+1}{2\mu} &= a \sum_{I=1}^N \frac{1}{N} [\phi_x(s_I)G_{xy}^{11}(s_I, t_k) + \phi_y(s_I)G_{xy}^{11}(s_I, t_k)] + \\ &\quad b \sum_{I=1}^N \frac{1}{N} [\phi_x(\hat{s}_I)G_{xy}^{21}(\hat{s}_I, t_k) + \phi_y(\hat{s}_I)G_{xy}^{21}(\hat{s}_I, t_k)] \\ -\bar{\sigma}_{yy}(t_k) \frac{\kappa+1}{2\mu} &= a \sum_{I=1}^N \frac{1}{N} [\phi_x(s_I)G_{yy}^{11}(s_I, t_k) + \phi_y(s_I)G_{yy}^{11}(s_I, t_k)] + \\ &\quad b \sum_{I=1}^N \frac{1}{N} [\phi_x(\hat{s}_I)G_{yy}^{21}(\hat{s}_I, t_k) + \phi_y(\hat{s}_I)G_{yy}^{21}(\hat{s}_I, t_k)] \end{aligned} \right. \quad (17)$$

( $k=1, 2, \dots, N-1$ ;  $I=1, 2, \dots, N$ )

方程(17)中的参数  $t_k$ 、 $s_I$ 、 $\hat{t}_k$ 、 $\hat{s}_I$  在文献[16]中可以找到。方程中的未知数有  $4N$  个, 而线性方程只有  $4N-4$  个, 所以需要添加 4 个方程, 由文献[16]得知整个裂纹上(包括水平段和偏折段)位错的博格斯矢量之和为零, 可以得到方程(18)。

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{a}{N} \sum_{I=1}^N \phi_x(s_I) + \frac{b \cos \alpha}{N} \sum_{I=1}^N \phi_x(\hat{s}_I) - \frac{b \sin \alpha}{N} \sum_{I=1}^N \phi_y(\hat{s}_I) &= 0 \\ \frac{a}{N} \sum_{I=1}^N \phi_y(s_I) + \frac{b \sin \alpha}{N} \sum_{I=1}^N \phi_x(\hat{s}_I) + \frac{b \cos \alpha}{N} \sum_{I=1}^N \phi_y(\hat{s}_I) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (18)$$

偏折裂纹的拐点处需要保证其位移的连续性, 因此在此在  $x$ 、 $y$  两个方向上分别建立方程:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_x(+1) &= \cos \alpha \phi_x(-1) - \sin \alpha \phi_y(-1) \\ \phi_y(+1) &= \sin \alpha \phi_x(-1) + \cos \alpha \phi_y(-1) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

方程数的个数与未知数的个数一致, 通过计算机软件编写  $4N \times 4N$  矩阵方程组, 求解  $4N$  个数值解。为了让精度更加准确, 其中  $N=70$ 。相应的参量由此可得。

所求解的  $\phi_i(s_i)$  ( $i=x, y, \hat{x}, \hat{y}$ ) 可用于求解应力强度因子, 其求解方法可在参考文献[16]中获得, 见公式(20)。

$$\left\{ \begin{aligned} K_I(\pm 1) &= \pm \sqrt{\pi i} \frac{2\mu}{\kappa+1} \phi_k(\pm 1), \\ K_{II}(\pm 1) &= \pm \sqrt{\pi i} \frac{2\mu}{\kappa+1} \phi_m(\pm 1) \quad i=a, b; k=y, \hat{y}; m=x, \hat{x} \end{aligned} \right. \quad (20)$$

对于裂纹的扩展方向, 选取最大周向应力判定。该方法可较好地判断材料断裂方向<sup>[23]</sup>。其原理是裂纹会向裂纹尖端周向拉应力最大的方向扩展<sup>[23, 25]</sup>。裂纹的扩展方向可以用应力强度因子来进行计算, 其公式为:

$$\theta_{\text{direction}} = 2 \times \arctan \left[ \frac{1}{4} \times \frac{K_I}{K_{II}} - \frac{K_{II}}{Abs[K_{II}]} \times \frac{1}{4} \sqrt{\left( \frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (21)$$

其中,  $\theta_{\text{direction}}$  代表扩展方向, 以逆时针方向为正。故裂纹的扩展方向会在裂纹尖端处逆时针为正方向, 顺时针为负方向。可得出, 裂纹  $\theta_{\text{direction}}$  为正时, 裂纹的扩展方向在坐标系  $\hat{x}-\hat{y}$  的一、二象限区域内;  $\theta_{\text{direction}}$  为负时, 裂纹的扩展方向在坐标系  $\hat{x}-\hat{y}$  的三、四象限区域内。

为方便进行集中处理以及更好地展示和分析, 将文中所求的应力强度因子用  $K^*$  来无量纲化, 并进行

归一化处理：

$$K^* = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} \quad (22)$$

### 3 结果验证

利用软件 ANSYS 建模，以此来验证其理论方法

的正确性，有限元模型见图 3。将模型中复杂载荷简化为拉伸载荷，分别选取  $d/a=1.5$ 、 $b/a=0.1$  及  $d/a=1.5$ 、 $\alpha=30^\circ$ ，在拉伸作用下，不同角度以及不同长度比下的理论数据与有限元模拟数据如图 4a—b 所示。在一定误差下，对比数据相差无几，模拟结果与理论结果计算误差约为 0.1%，故本文使用的分布位错结果可靠。

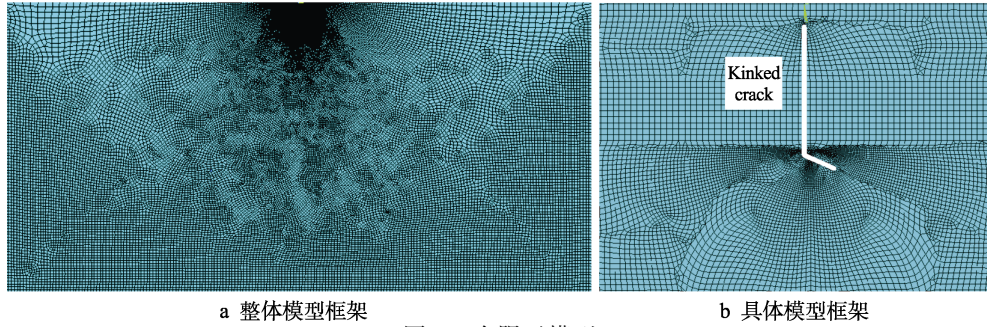


图 3 有限元模型  
Fig.3 Finite element model

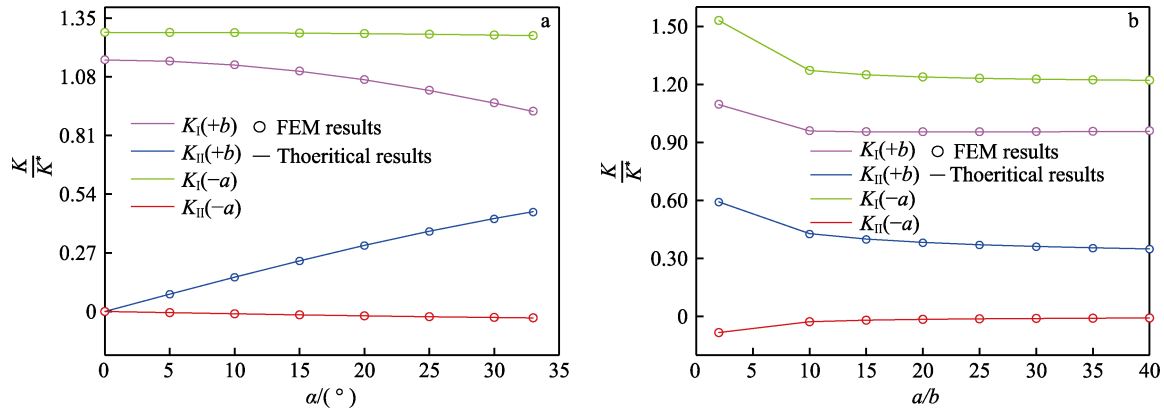


图 4 模拟与理论数据对比  
Fig.4 Comparison of simulation and theoretical data

分布位错的方法也可以用于多段偏折裂纹，只需要保持每两段之间偏折拐角处位移的连续性，沿着分支  $I$

和分支  $I+1$  的位错密度的值相等，同时保证每条裂纹均是张开状态，也就是在  $x$ 、 $y$  两个方向上分别建立方程：

$$\begin{cases} \cos \alpha_I \phi_x^I(+1) - \sin \alpha_I \phi_y^I(+1) = \cos \alpha_{I+1} \phi_x^{I+1}(-1) - \sin \alpha_{I+1} \phi_y^{I+1}(-1) \\ \sin \alpha_I \phi_x^I(+1) + \cos \alpha_I \phi_y^I(+1) = \sin \alpha_{I+1} \phi_x^{I+1}(-1) + \cos \alpha_{I+1} \phi_y^{I+1}(-1) \end{cases} \quad (I=1, 2, \dots, N-1) \quad (23)$$

$$-\tilde{\sigma}_{ij}^I(t_k) \frac{\kappa+1}{2\mu} = R_i \sum_{J=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} [\phi_x^J(s_I) G_{xij}^{JJ}(s_I, t_k) + \phi_y^J(s_I) G_{yij}^{JJ}(s_I, t_k)] \quad (ij=xy, yy; I, J=1, 2, 3, \dots, N) \quad (24)$$

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xy}^1(t_k) = \tau^\infty; \tilde{\sigma}_{yy}^1(t_k) = \sigma^\infty \\ \tilde{\sigma}_{xy}^2(t_k) = \sigma^\infty \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \tau^\infty \cos 2\alpha_2; \tilde{\sigma}_{yy}^2(t_k) = \sigma^\infty \cos^2 \alpha_2 - \tau^\infty \sin 2\alpha_2 \\ \tilde{\sigma}_{xy}^3(t_k) = \sigma^\infty \sin \alpha_3 \cos \alpha_3 + \tau^\infty \cos 2\alpha_3; \tilde{\sigma}_{yy}^3(t_k) = \sigma^\infty \cos^2 \alpha_3 - \tau^\infty \sin 2\alpha_3 \\ \dots \\ \tilde{\sigma}_{xy}^I(t_k) = \sigma^\infty \sin \alpha_I \cos \alpha_I + \tau^\infty \cos 2\alpha_I; \tilde{\sigma}_{yy}^I(t_k) = \sigma^\infty \cos^2 \alpha_I - \tau^\infty \sin 2\alpha_I \\ \tilde{\sigma}_{xy}^I(t_k) = \sigma^\infty \sin \alpha_{I+1} \cos \alpha_{I+1} + \tau^\infty \cos 2\alpha_{I+1}; \tilde{\sigma}_{yy}^I(t_k) = \sigma^\infty \cos^2 \alpha_{I+1} - \tau^\infty \sin 2\alpha_{I+1} \end{cases} \quad (25)$$

## 4 结果与分析

### 4.1 埋置深度对其两端 $K_{II}$ 和 $K_I$ 的影响

取裂纹长度之比 ( $b/a=0.1$ ) 以及载荷比 ( $\tilde{\sigma}_{xy}/\tilde{\sigma}_{yy}=1$ )

为定值，在改变偏折裂纹埋置深度的情况下，裂纹两端的  $K_{II}$  和  $K_I$  的变化如图 5 所示。

在裂纹长度之比 ( $b/a=0.1$ ) 以及载荷比 ( $\tilde{\sigma}_{xy}/\tilde{\sigma}_{yy}=1$ ) 不变的情况下，其应力强度因子只受埋置深度的影响。由图 5 可知，裂纹两端的  $K_{II}$  和  $K_I$  会随着与主裂



纹长度之比 ( $d/a$ ) 的增大而减小。由图 5a 可知, 偏折裂纹段尖端  $K_{II}(+b)$  随着偏折角的增加, 先呈一定比例增加, 达到峰值后开始减小, 其峰值在  $21^\circ$  左右, 此时裂纹最容易发生扩展。如图 5b 所示, 偏折裂纹尖端  $K_I(+b)$  在偏折角度  $33^\circ$  左右, 其值约为 0, 可以

看出裂纹的埋置深度对其闭合角的影响并不大, 若超过此值, 应考虑其闭合时对裂纹的影响。分别对比裂纹两端的  $K_{II}$  和  $K_I$ , 其中图 5c、d 的应力强度因子均大于图 5a、b, 说明裂纹更容易向外部扩展而形成表面裂纹。

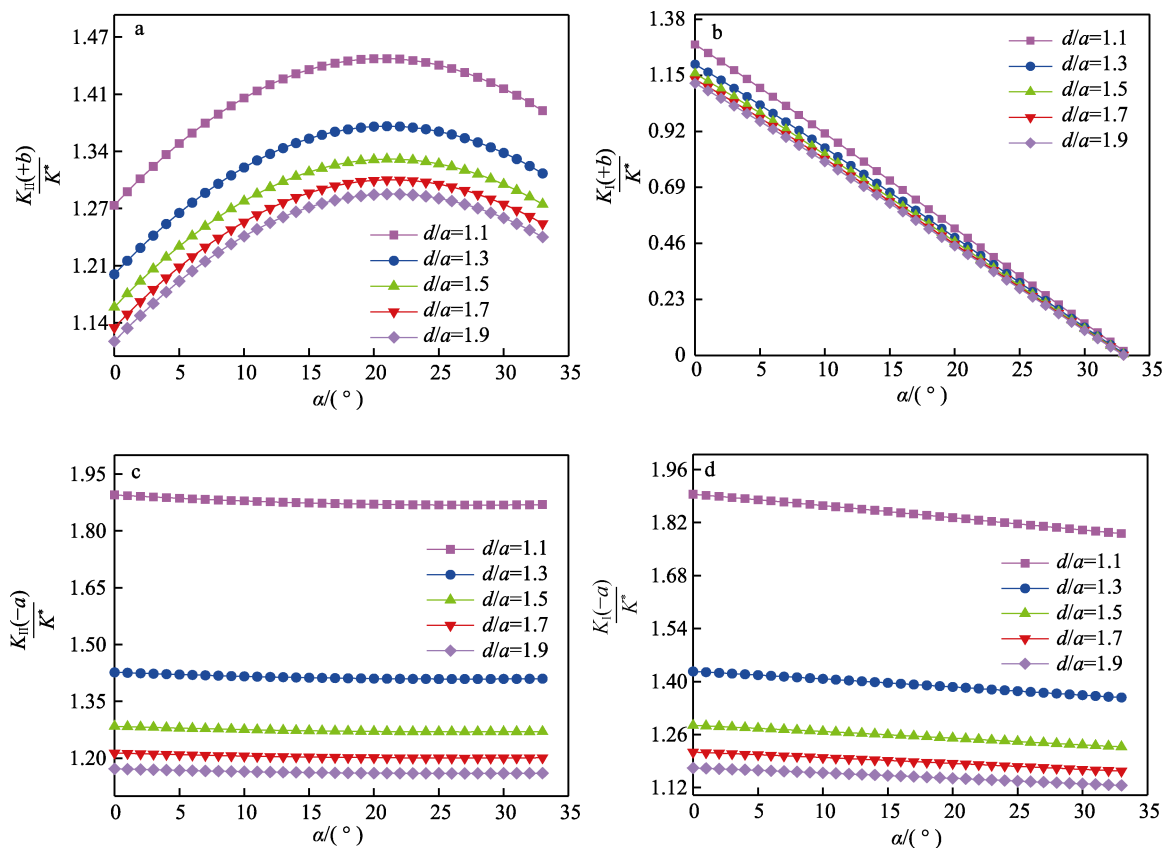


图 5 裂纹埋置深度对归一化  $K_{II}$  和  $K_I$  的影响

Fig.5 The influence of crack embedding depth on normalized  $K_{II}$  and  $K_I$

## 4.2 长度比对其两端 $K_{II}$ 和 $K_I$ 的影响

取裂纹埋置深度与主裂纹长度之比 ( $d/a=1.1$ ) 以及载荷比 ( $\bar{\sigma}_{xy}/\bar{\sigma}_{yy}=1$ ) 为定值, 在改变主裂纹与偏折长度大小的情况下, 裂纹两端的  $K_{II}$  和  $K_I$  的变化如图 6 所示。

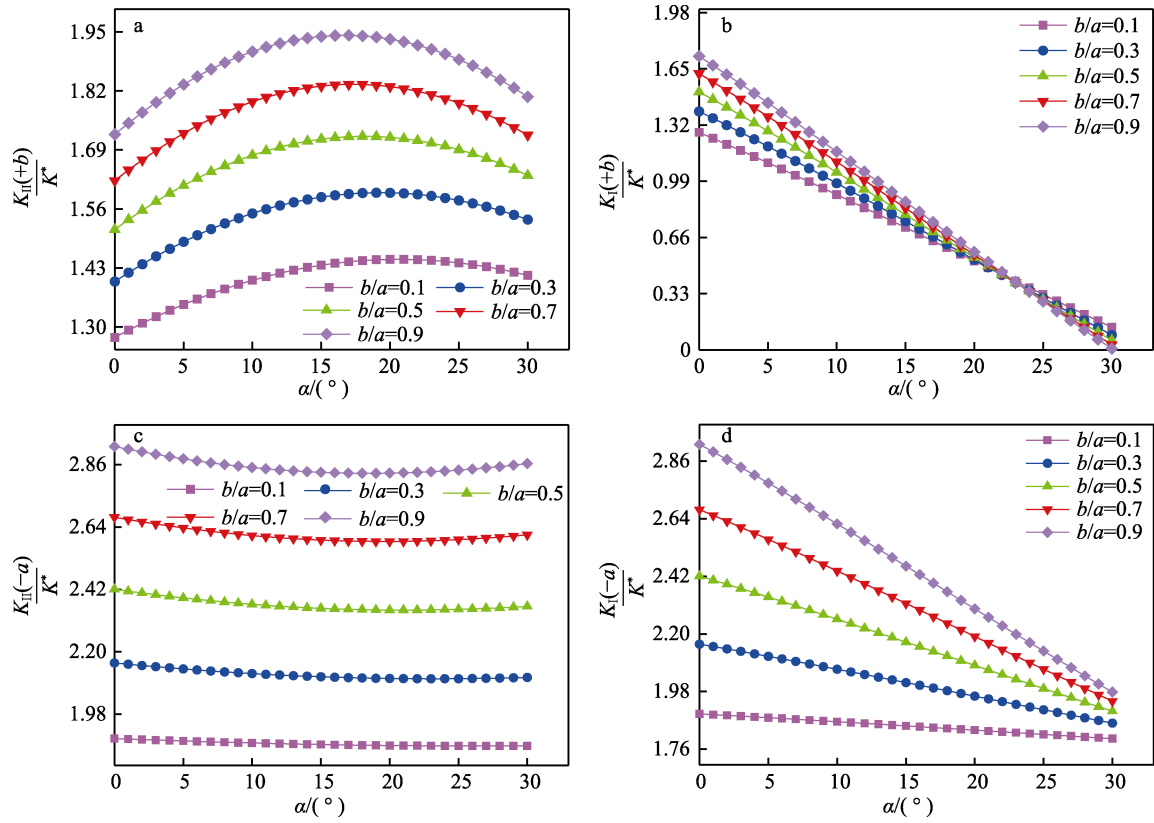
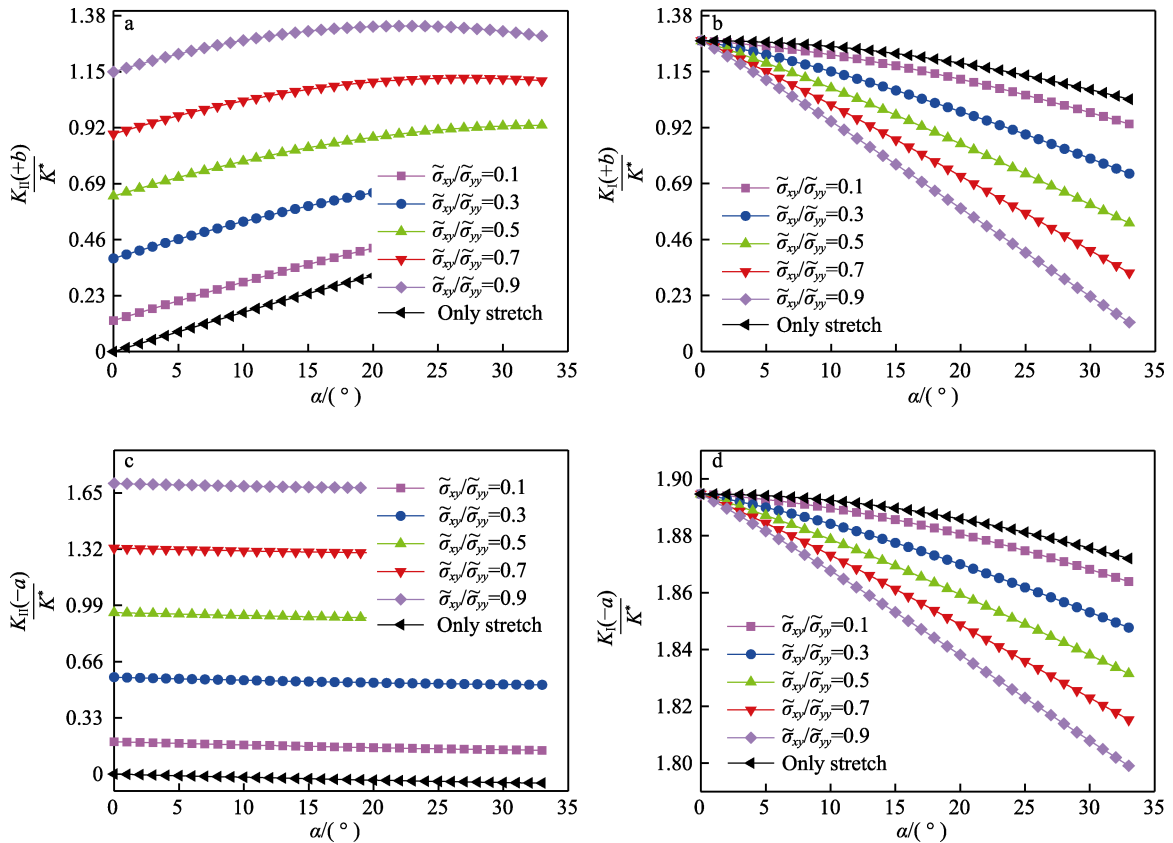
在裂纹埋置深度与主裂纹长度之比 ( $d/a=1.1$ ) 以及载荷比 ( $\bar{\sigma}_{xy}/\bar{\sigma}_{yy}=1$ ) 不变的情况下, 其应力强度因子只受裂纹长度之比 ( $b/a$ ) 的影响。由图 6 可知, 随着  $b/a$  的增加, 裂纹两端  $K_{II}$  和  $K_I$  的值逐渐增加。由图 6a 可知, 偏折裂纹段尖端  $K_{II}(+b)$  随着偏折角的增加, 先呈一定比例增加, 达到峰值后开始减小, 其峰值在  $16^\circ$  左右, 此时裂纹最容易发生扩展。由图 6b 可知, 偏折裂纹尖端  $K_I(+b)$  在偏折角度  $30^\circ\sim 33^\circ$  处, 其值约为 0, 若超过此值, 应考虑其闭合时对裂纹的影响。随着偏折裂纹部分长度的增加, 其应力强度因子  $K_I(+b)$  接近于 0 的角度逐渐变小。由此说明, 偏折裂纹的偏折角受裂纹长度的影响较大。对比裂纹两端

$K_{II}$  和  $K_I$  的变化, 如图 6 所示,  $K_{II}(-a)$  以及  $K_I(-a)$  均大于  $K_{II}(+b)$  和  $K_I(+b)$ , 说明裂纹更容易向外部扩展而形成表面裂纹。

## 4.3 载荷比对裂纹两端 $K_{II}$ 和 $K_I$ 的影响

取裂纹长度之比 ( $b/a=0.1$ ) 以及裂纹埋置深度与主裂纹长度之比 ( $d/a=1.1$ ) 为定值, 在改变载荷比的情况下, 左、右两端  $K_{II}$  和  $K_I$  的变化曲线如图 7 所示。

在裂纹长度之比 ( $b/a=0.1$ ) 以及裂纹埋置深度与主裂纹长度之比 ( $d/a=1.1$ ) 不变的情况下, 其  $K_{II}$  和  $K_I$  只受横剪载荷比 ( $\bar{\sigma}_{xy}/\bar{\sigma}_{yy}$ ) 的影响, 两段裂纹的  $K_{II}$  和  $K_I$  大小会有所不同。由图 7 可知, 在条件不变的情况下, 随着载荷比的增大, 应力强度因子  $K_{II}$  逐渐增大, 应力强度因子  $K_I$  逐渐减小, 与在只有拉伸情况下应力强度因子  $K_{II}$  和  $K_I$  大小的变化曲线刚好相反, 其原因在于, 受到拉伸作用, 增加剪切会减小应力强度因子  $K_I$ 。观察图 7a 可知, 随着偏折角以及载荷比

图 6 裂纹长度对归一化  $K_{II}$  和  $K_I$  的影响Fig.6 The influence of crack length on normalized  $K_{II}$  and  $K_I$ 图 7 载荷大小对归一化  $K_{II}$  和  $K_I$  的影响Fig.7 The influence of load size on normalized  $K_{II}$  and  $K_I$

( $\bar{\sigma}_{xy}/\bar{\sigma}_{yy}$ ) 的增加, 偏折段裂纹尖端应力强度因子  $K_{II}(+b)$  逐渐增大, 其值变化增量逐渐减小, 且载荷比越大, 裂纹越容易发生扩展。观察图 7b 可知, 改变载荷比的大小, 偏折纹闭合时的角度随之有较大的变化,  $K_I$  会随着 ( $\bar{\sigma}_{xy}/\bar{\sigma}_{yy}$ ) 的增大而逐渐减小。对比裂纹两端  $K_{II}$  和  $K_I$  的变化, 如图 7 所示,  $K_{II}(-a)$  以及  $K_I(-a)$  均大于  $K_{II}(+b)$  和  $K_I(+b)$ , 说明裂纹更容易向外部扩展而形成表面裂纹。

#### 4.4 裂纹埋置深度对裂纹扩展方向的影响

取裂纹长度之比 ( $b/a=0.1$ ) 以及载荷比 ( $\bar{\sigma}_{xy}/\bar{\sigma}_{yy}=1$ )

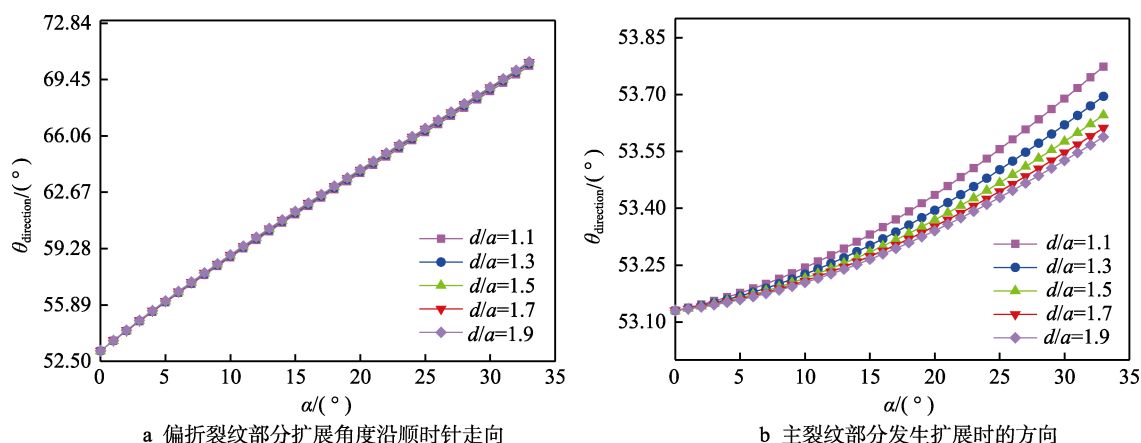


图 8 裂纹埋置深度对裂纹扩展方向的影响

Fig.8 The influence of crack embedment depth on crack propagation direction: a)the extension angle of the deflection crack is clockwise, b)the direction of the main crack when it propagates

#### 4.5 裂纹长度对裂纹扩展方向的影响

取裂纹埋置深度与主裂纹长度之比 ( $d/a=1.1$ ) 以及载荷比 ( $\bar{\sigma}_{xy}/\bar{\sigma}_{yy}=1$ ) 为定值, 在改变主裂纹与偏折裂纹长度比的情况下, 裂纹两端扩展方向的变化曲线如图 9a、b 所示。

在裂纹埋置深度与主裂纹长度之比 ( $d/a=1.1$ ) 以及载荷比 ( $\bar{\sigma}_{xy}/\bar{\sigma}_{yy}=1$ ) 不变的情况下, 裂纹裂纹扩展方向只受埋置深度的影响, 并随着偏折角度的改变

为定值, 在改变裂纹埋置深度的情况下, 裂纹左、右两端扩展方向的变化曲线如图 8a、b 所示。

在裂纹长度之比 ( $b/a=0.1$ ) 以及载荷比 ( $\bar{\sigma}_{xy}/\bar{\sigma}_{yy}=1$ ) 不变的情况下, 其裂纹扩展方向只受埋置深度的影响, 并随着偏折角度的改变而变化。图 8a 为偏折裂纹部分扩展角度沿顺时针走向, 改变裂纹深度对其影响不大, 其扩展方向随着裂纹偏折角度的增加而逐渐增加。图 8b 为主裂纹部分发生扩展时的方向, 改变裂纹深度会减小其扩展方向角度, 并且偏折角度增加, 其扩展角度也随之增加。

而变化。图 9a 为偏折裂纹部分扩展角度沿顺时针走向, 在相同偏折角度的情况下, 裂纹扩展角度随着长度比的增大而增大, 同时在相同长度比的情况下, 随着偏折角度的增加, 裂纹扩展角度也随之逐渐增大。图 9b 表示主裂纹部分发生扩展时的方向, 与图 9a 类似, 在相同偏折角度的情况下, 裂纹扩展角度随着长度比的增大而增大, 同时在相同长度比的情况下, 随着偏折角度的增加, 裂纹扩展角度也随之逐渐增大。

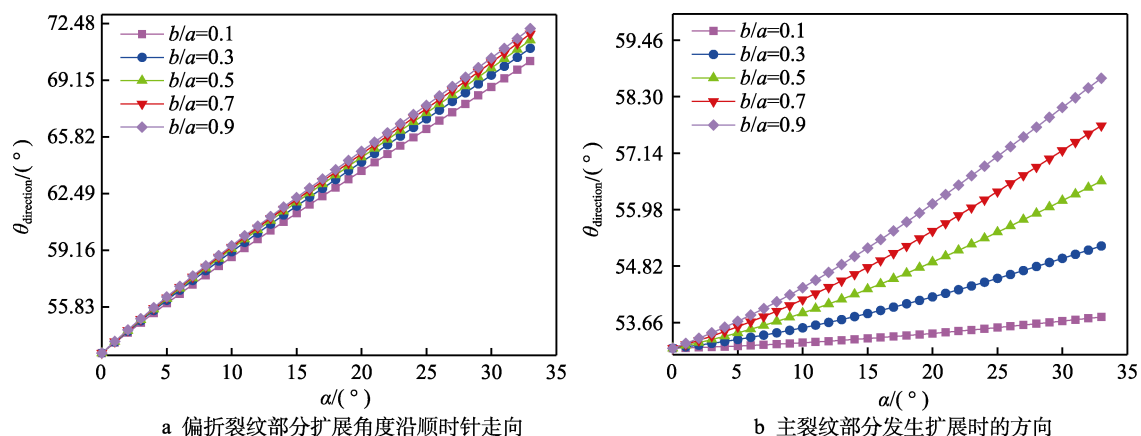


图 9 长度对裂纹两端扩展的改变

Fig.9 The change of length to the propagation of both ends of the crack: a)the extension angle of the deflection crack is clockwise, b)the direction of the main crack when it propagates



#### 4.6 载荷比对裂纹扩展方向的影响

取主裂纹与偏折裂纹长度的比值 ( $b/a=0.1$ ) 以及裂纹埋置深度与主裂纹长度之比 ( $d/a=1.1$ ) 为定值, 计算在改变载荷比的情况下, 裂纹两端扩展方向的变化, 如图 10 所示。

在主裂纹与偏折裂纹长度的比值 ( $b/a=0.1$ ) 以及裂纹埋置深度与主裂纹长度之比 ( $d/a=1.1$ ) 不变的情况下, 其裂纹扩展方向只受载荷比 ( $\tilde{\sigma}_{xy}/\tilde{\sigma}_{yy}$ ) 的影响。扩展方向会随着偏折角度的改变而改变。裂纹的扩展方向由公式(21)可知,  $K_{II}$  是造成偏折的主要因

素, 而  $K_I$  则不会。图 10a 表示偏折裂纹部分发生扩展时的方向, 其角度为顺时针方向。由于载荷比不同, 其扩展方向的初始值会发生变化。与只有拉伸的情况下相比, 增加载荷比时裂纹的初始扩展方向及增加偏折角时裂纹的扩展方向均更大。图 10b 表示主裂纹部分发生扩展时的方向。在只有拉伸的情况下, 随着偏折角度的增加, 其扩展角度逐渐增大。在存在载荷比的作用下, 裂纹扩展角度也随着载荷比的增大而增大, 同时对于裂纹偏折角度的增加, 裂纹扩展角度逐渐减小到趋于平缓。

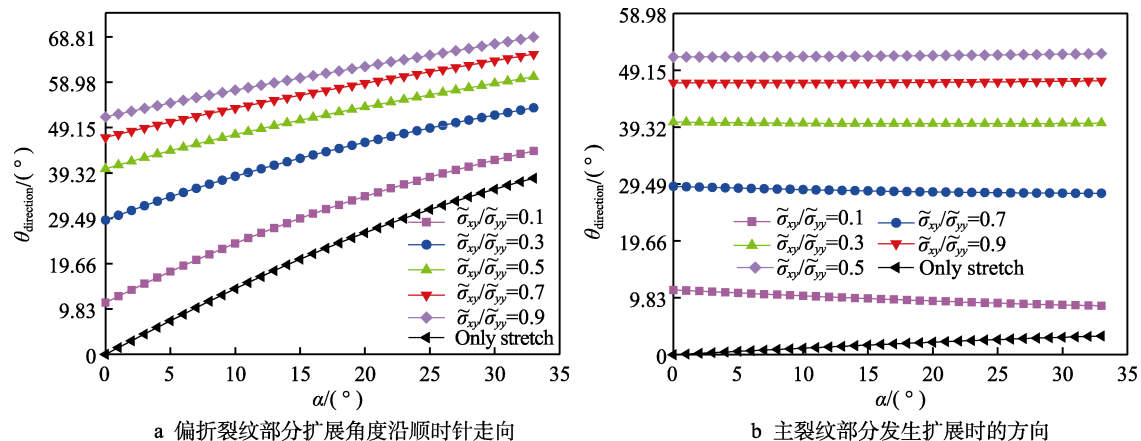


图 10 载荷比对裂纹扩展方向的影响

Fig.10 The effect of load ratio on crack propagation direction a)the extension angle of the deflection crack is clockwise, b)the direction of the main crack when it propagates

## 5 结论

1) 由以上理论推导可知, 此方法进行推导裂纹是一种可靠且值得信赖的方法。同理可知, 此方法可用于更加复杂的情况 (多段偏折、微裂纹影响等)。

2) 在复杂载荷作用下, 埋置深度与主裂纹长度比逐渐增大, 其应力强度因子的值逐渐减小, 裂纹更容易在主裂纹方向朝表面扩展, 其主裂纹扩展方向随着深度的增加而逐渐减小, 并随着偏折角度的增加而逐渐增加。偏折裂纹部分的扩展方向不受深度的影响, 并随着偏折角度的增加而逐渐增加, 裂纹两端的扩展方向均是顺时针。

3) 在复杂载荷作用下, 偏折裂纹与主裂纹长度比逐渐增大, 其应力强度因子的值逐渐增大。裂纹更容易在主裂纹方向朝表面扩展, 其主裂纹扩展角度随着长度比的增大而逐渐增大, 并随着偏折角度的增加而逐渐增加; 其偏折裂纹部分的扩展角度亦是如此, 裂纹两端的扩展方向均是顺时针。

4) 在不同载荷比作用下, 其应力强度因子随着载荷比的增大而逐渐增大。裂纹更容易在主裂纹方向朝表面扩展。随偏折角的增大, 主裂纹的扩展角会先减小, 后渐进不变; 其偏折裂纹部分的扩展角度, 随

着载荷比的增加而逐渐增加, 并随着偏折角的增加而逐渐增大, 裂纹两端的扩展方向均是顺时针。

## 参考文献:

- [1] 王强胜, 李孝滔, 咎晓东, 等. 分布位错法研究移动赫兹压力作用下次表面裂纹的力学行为[J]. 表面技术, 2019, 48(6): 252-260.  
WANG Qiang-sheng, LI Xiao-tao, ZAN Xiao-dong, et al. Mechanical behaviors of subsurface crack under moving hertz pressure by distributed dislocation method[J]. Surface technology, 2019, 48(6): 252-260.
- [2] LI Xiao-tao, JIANG Xiao-yu, LI Xu, et al. Solution of an inclined crack in a finite plane and a new criterion to predict fatigue crack propagation[J]. International journal of mechanical sciences, 2016, 119: 217-223.
- [3] LI Xiao-tao, YANG Hong-da, ZAN Xiao-dong, et al. Effect of a micro-crack on the kinked macro-crack[J]. Theoretical and applied fracture mechanics, 2018, 96: 468-475.
- [4] CARPINTERI A, SPAGNOLI A, TERZANO M. Crack morphology models for fracture toughness and fatigue strength analysis[J]. Fatigue & fracture of engineering materials & structures, 2019, 42(9): 1965-1979.

- [5] MILLER G R. A preliminary analysis of subsurface crack branching under a surface compressive load[J]. *Journal of tribology*, 1988, 110(2): 292-296.
- [6] MUKAI D J. An analysis of a near-surface crack branching under a rigid indenter[J]. *Journal of tribology*, 2000, 122(1): 23-29.
- [7] BEOM H G, CUI C B, LIN S. Stress intensity factor for a kinked interfacial crack in dissimilar anisotropic materials under antiplane deformation[J]. *Archive of applied mechanics*, 2012, 82(7): 963-976.
- [8] LO K K. Analysis of branched cracks[J]. *Journal of applied mechanics*, 1978, 45(4): 797-802.
- [9] HALLBÄCK N, TOFIQUE M W. Development of a distributed dislocation dipole technique for the analysis of multiple straight, kinked and branched cracks in an elastic half-plane[J]. *International journal of solids and structures*, 2014, 51(15-16): 2878-2892.
- [10] XIE Y J, HU Xiao-zhi, WANG X H. A theoretical note on mode I crack kinking and branching[J]. *Advanced materials research*, 2010, 118-120: 314-318.
- [11] CHEN Y Z. Stress intensity factors for curved and kinked cracks in plane extension[J]. *Theoretical and applied fracture mechanics*, 1999, 31(3): 223-232.
- [12] LI Yu-fei, SUN Tao, GAO Qing, et al. A stress intensity factor estimation method for kinked crack[J]. *Engineering fracture mechanics*, 2018, 188: 202-216.
- [13] JIN Xiao-qing, KEER L M, CHEZ E L. Numerical simulation of growth pattern of a fluid-filled subsurface crack under moving hertzian loading[J]. *International journal of fracture*, 2007, 142(3-4): 219-232.
- [14] JIN Xiao-qing, KEER L M. Solution of multiple edge cracks in an elastic half plane[J]. *International journal of fracture*, 2006, 137(1-4): 121-137.
- [15] LI Ying-zhi, HILLS D A. Stress intensity factor solutions for kinked surface cracks[J]. *The journal of strain analysis for engineering design*, 1990, 25(1): 21-27.
- [16] HILLS D A, KELLY P A, DAI D N, et al. Solution of crack problems: The distributed dislocation technique[J]. *Journal of applied mechanics*, 1998, 65(2): 548.
- [17] LI Xiao-tao, JIANG Xiao-yu. Effect of a micro-crack on the edge macro-crack propagation rate and path under mixed loads[J]. *Acta mechanica solida sinica*, 2019, 32(4): 517-532.
- [18] LI Xiao-tao, LI Xu, JIANG Xiao-yu. Influence of a micro-crack on the finite macro-crack[J]. *Engineering fracture mechanics*, 2017, 177: 95-103.
- [19] NODA N A, ODA K. Numerical solutions of the singular integral equations in the crack analysis using the body force method[J]. *International journal of fracture*, 1992, 58(4): 285-304.
- [20] KAYA A C, ERDOGAN F. On the solution of integral equations with strongly singular kernels[J]. *Quarterly of applied mathematics*, 1987, 45(1): 105-122.
- [21] HE Ming-yuan, HUTCHINSON J W. Kinking of a crack out of an interface[J]. *Journal of applied mechanics*, 1989, 56(2): 270-278.
- [22] 王强胜, 李孝滔, 咎晓东, 等. 分布位错法研究钢轨表面边缘直裂纹的力学行为[J]. *表面技术*, 2020, 49(2): 200-211.  
WANG Qiang-sheng, LI Xiao-tao, ZAN Xiao-dong, et al. Mechanical behavior of straight crack on the edge of rail surface by distributed dislocation method[J]. *Surface technology*, 2020, 49(2): 200-211.
- [23] ERDOGAN F, SIH G C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear[J]. *Journal of basic engineering*, 1963, 85(4): 519-525.
- [24] 杨军辉, 雷勇军. 垂直界面裂纹应力强度因子的加料有限元分析[J]. *工程力学*, 2016, 33(2): 59-65.  
YANG Jun-hui, LEI Yong-jun. The enriched finite element analysis of stress intensity factor for a crack normal to bi-material interface[J]. *Engineering mechanics*, 2016, 33(2): 59-65.
- [25] 刘倩. 改进的扩展有限元方法及其在多孔生物陶瓷中的裂纹扩展行为研究[D]. 天津: 天津大学, 2012.  
LIU Qian. Improvement and implementation of the extended finite element method on Abaqus and application on bioceramics[D]. Tianjin: Tianjin University, 2012.
- [26] 刘智欣. 多层弹性结构退让接触问题的数值模拟[D]. 南京: 东南大学, 2018.  
LIU Zhi-xin. On the numerical simulation of receding contact in multilayered elastic structures[D]. Nanjing: Southeast University, 2018.
- [27] 邢帅兵, 王强胜, 生月, 等. 圆形杂质对裂纹扩展的影响[J]. *应用数学和力学*, 2019, 40(2): 189-199.  
XING Shuai-bing, WANG Qiang-sheng, SHENG Yue, et al. Effects of circular inhomogeneity on crack propagation[J]. *Applied mathematics and mechanics*, 2019, 40(2): 189-199.