

# 油水两相流润滑轧机油膜轴承的摩擦行为分析

王涛, 王优强, 王建, 范晓梦

(青岛理工大学 机械工程学院, 山东 青岛 266520)

**摘要:** **目的** 研究含水润滑油对轧机油膜轴承的摩擦学性能的影响。**方法** 选取轧机油膜轴承为研究对象, 利用油水两相流体数学模型和弹流润滑方程研究轧机油膜轴承在等温条件下的润滑特性, 分析油水两相流体润滑膜的厚度、膜厚分别随含水率、滑滚比、轴颈间隙、主轴转速和轧制力的变化关系。**结果** 水介入润滑油之后, 随着含水率的增加, 油水两相流体的黏度先增加, 在含水率为 30% 左右时达到最大值 ( $0.08 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ), 之后又迅速减小, 直至接近于纯水的黏度 ( $0.001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ )。当含水率为 30% 时, 无量纲膜厚达到最大值 (0.82), 当含水率为 90% 时, 无量纲膜厚达到最小值 (0.68)。**结论** 随着含水率的增加, 油水两相流体由油包水流型转化为水包油流型, 压力变化不大, 膜厚先增加后减小, 作为润滑剂, 油包水流型比水包油流型具有更好的润滑性能, 且在流型转变点处的润滑性能最优。随着滑滚比和轧机油膜轴承主轴转速的增加, 压力减小, 承载能力减弱, 膜厚增加, 润滑性能增强。随着轴颈间隙和外部轧制力的增加, 压力增加, 承载能力增强, 膜厚减小, 润滑性能减弱。

**关键词:** 油水两相流; 油包水; 水包油; 轧机油膜轴承; 等温弹流润滑; 摩擦行为

**中图分类号:** TG356.16 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-3660(2016)10-0089-07

**DOI:** 10.16490/j.cnki.issn.1001-3660.2016.10.014

## Friction Behavior of Oil Film Bearing in Oil-water Two-phase Flow Lubricated Rolling Mill

WANG Tao, WANG You-qiang, WANG Jian, FAN Xiao-meng

(School of Mechanical Engineering, Qingdao University of Technology, Qingdao 266520, China)

**ABSTRACT:** The work aims to study the effect of water presence in oil on the tribological properties of oil film bearing. The oil film bearing of rolling mill as the object of study was established by mathematic model of oil-water two-phase flow and equation of elastohydrodynamic lubrication under isothermal conditions, so as to study the lubrication properties of oil film bearing in rolling mill, and the variation relationship between pressure & film thickness of oil-water two-phase fluid lubrication film and water content, slip ratio, journal gap, spindle speed, rolling force. With the increase of water content after charging lubricating water, viscosity of the oil-water two-phase flow first increased and reached a maximum ( $0.08 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ) at a water content of about 30%, then decreased rapidly until reducing to viscosity of pure water ( $0.001 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ ). Dimensionless film thickness reached the maximum (0.82) at water content of 30% and the minimum (0.68) at 90%. As water content increased, the oil-water

收稿日期: 2016-02-05; 修订日期: 2016-06-24

Received: 2016-02-05; Revised: 2016-06-24

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51575289、51175275)

Fund: Supported by The National Natural Science Foundation of China Program (51575289, 51175275)

作者简介: 王涛 (1990—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为油水两相流体的弹流润滑研究。

Biography: WANG Tao (1990—), Male, Master, Research focus: study of oil-water two-phase fluid EHL.

通讯作者: 王优强 (1970—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为摩擦学与表面工程。

Corresponding author: WANG You-qiang (1965—), Male, Doctor, Professor, Research focus: tribology and surface engineering.

two-phase fluid transformed into oil-in-water flow pattern from water-in-oil flow pattern with minor pressure change, film thickness first increased and then decreased. Compared with oil-in-water flow pattern, water-in-oil flow pattern as a lubricant provided better lubricating performance and optimal performance at transition point of flow pattern. With the increase of slip ratio and spindle speed of oil film bearing, pressure and carrying capacity decrease while film thickness and lubrication performance increase. With the increase of journal gap and external rolling force, pressure and carrying capacity increase while film thickness and lubricating performance decrease.

**KEY WORDS:** oil-water two-phase flow; water in oil; oil in water; oil film bearing in rolling mill; isothermal elastohydrodynamic lubrication; friction behavior

油水两相流体是一种水和油混合物, 根据分散相的不同分为油包水流型 (W/O 型) 和水包油流型 (O/W 型)。油包水流型是水滴以分散相的形式分散在润滑油中, 油包水流型则是油以分散相的形式分散在水中。油中水的含量对油水两相流体的形态起决定性作用, 当含水率超过一定量时, 流体从油包水型转化为水包油型。

油水两相流体普遍存在于机械传动装置的润滑系统内, 比如主要应用于钢厂中轧钢设备上的轧机油膜轴承, 其作为一种承载和传动机构是整台轧钢机的核心部件<sup>[1]</sup>。在实际工况中, 轧机油膜轴承常常面临着高速重载、冲击振动等恶劣复杂条件, 因此, 其润滑系统的密封失效变得不可避免, 这样极易导致外界的冷却水、水蒸气介入到润滑油中, 形成油水两相流体。

国内外众多学者对油水两相流体做出了大量研究。1932 年, Taylor 等<sup>[2]</sup>提出了油水两相混合模型, 并指出油水两相混合液的黏度同油和水的含量存在一定关系。1965 年, Mac Donald 等<sup>[3]</sup>通过实验证明润滑油中介入水会使轴承生锈, 影响轴承的使用寿命。1968 年, Schatzberg 等<sup>[4]</sup>通过研究表明, 润滑油中水的存在使得轴承表面产生氢脆现象, 致使轴承失效。1988 年, Nakahara 等<sup>[5]</sup>利用光学原理观察到了水包油型两相流体的润滑薄膜, 进一步找出了许多影响油包水型流体润滑性能的参数。1993 年, Al-Sharif 等<sup>[6]</sup>通过两相流体连续性理论以及实验建立了油水两相流体的雷诺数学方程, 并利用该数学模型分析了油水两相流体的润滑特性。1999 年, 夏守浩等<sup>[7]</sup>建立了一套在有油水两相润滑流体下测量滑动轴承承载压力的装置, 并研究了润滑油中介入水后润滑膜的压力变化。2000 年, 江延明<sup>[8]</sup>对油包水型两相流体的流变性进行了研究, 指出两相流体在含水较低时为牛顿流体, 含水较高时为非牛顿流体。2005 年, 胡志华等<sup>[9]</sup>在前人研究的基础

上, 通过实验得到了一种计算油水两相流体黏度的新模型, 并指出油包水流型向水包油流型转变的临界点在含水率 30% 处。2008 年, 杨莹等<sup>[10]</sup>基于水包油型两相流体研究了其含油率和进油孔的位置对动静压轴承的影响。2011 年, Harika 等<sup>[11]</sup>通过实验发现润滑油中介入水能增加润滑流体的黏度, 同时提出了一种用于求解油水两相流体黏度的模型。2013 年, Caronni 等<sup>[12]</sup>通过实验发现, 含水率在一定范围内, 润滑油中水的介入对流体的黏度与温度有较大影响, 并指出和传统的纯油润滑相比, 油包水型两相流体的润滑效果更好。因此, 以轧机油膜轴承为研究对象, 探讨等温条件下油水两相流对轧机油膜轴承摩擦学性能的影响, 对工程实践问题具有一定的指导意义。

## 1 轧机油膜轴承的几何模型

由于轧机油膜轴承的轴向长度较之轴/轴承接触区尺寸大若干个数量级, 因此将轧机油膜轴承弹流润滑模型转化为弹性线接触问题, 根据线接触弹流润滑理论, 建立如图 1 所示的几何模型<sup>[13]</sup>。图中  $R_1$ 、 $R_2$ 、 $R$  分别为锥套、衬套及其综合曲率的半径, 且  $R=R_1R_2/(R_2-R_1)$ ;  $h$ 、 $h_0$  分别为油水两相流润滑膜的膜厚和中心膜厚。锥套材料采用 45# 钢, 衬套材料采用巴氏合金。

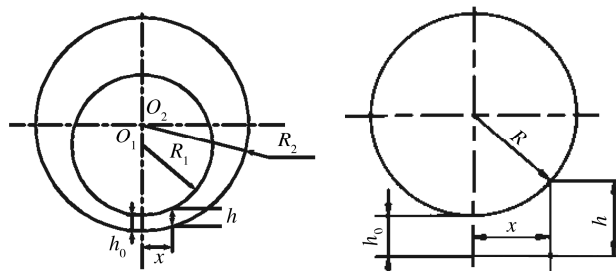


图 1 轧机油膜轴承的弹流模型及其等效模型  
Fig.1 EHL and equivalent model of rolling mill in oil film bearing

## 2 油水两相流的数学模型

油水两相流体的黏度方程<sup>[11]</sup>、密度方程、比热方程及热传导方程分别如下:

$$\eta = \Phi\eta_1 + (1-\Phi)^n\eta_2 + 4\Phi(1-\Phi)\eta_2 \exp(a - a\Phi + b) \quad (1)$$

$$\rho = \Phi\rho_1 + (1-\Phi)\rho_2 \quad (2)$$

$$c = \Phi c_1 + (1-\Phi)c_2 \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\Phi\lambda_2 + (1-\Phi)\lambda_1} \quad (4)$$

式中:  $\eta_1$ 、 $\eta_2$ 、 $\eta$  分别为水、润滑油以及油水两相流体的黏度;  $\Phi$  为油水两相流体的含水率, 其中  $n=2.60$ ,  $a=14.99$ ,  $b=-8.16$ ;  $\rho_1$ 、 $\rho_2$ 、 $\rho$  分别为水、润滑油、油水两相流体的密度;  $c_1$ 、 $c_2$ 、 $c$  分别为水、润滑油以及油水两相流体的比热容;  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\lambda$  分别为水、润滑油和油水两相流体的导热系数。

油水两相流体转相是指在一定条件下, 水滴从分散相转为连续相, 同时润滑油从连续相转化为分散相, 于是流体从油包水流型转换为水包油流型, 并且该过程不可逆。从流体力学的角度分析, 油包水型两相流体是一种不稳定的体系, 其稳定性只是相对的、暂时的, 即具有较强的流变特性。油水两相流体的流变特性很复杂, 是含水率、温度、黏度、剪切速率和液滴大小等多个因素综合作用的结果, 并且流体在转相前后性质发生很大的变化。一般来说, 含水率对转相的影响最大, 这主要是因为水相在流体中的沉降、聚集和凝并造成的, 当含水率较大时, 水相液滴之间的距离很小, 极易产生聚集从而合并成大液滴, 流体从油包水型转变为水包油型, 此外, 大量的实验证明流体的转相点在 30% 左右。

图 2 为油水两相流体的黏度变化曲线, 可知水

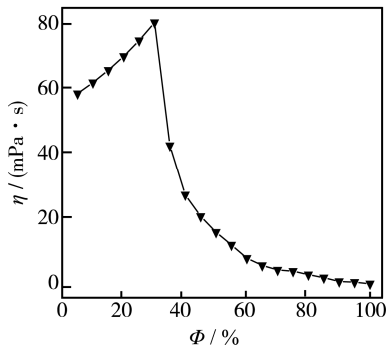


图 2 黏度变化曲线

Fig.2 The curve of viscosity variation

介入润滑油之后, 随着含水率的增加, 油水两相流体的黏度先增加, 在含水率为 30% 左右时达到最大值, 之后又迅速减小。图 3 为油水两相流体随含水率变化的转相过程, 可知随着含水率的增加, 油水两相流体由油包水流型转化为水包油流型的变化过程, 转相点即为含水率为 30% 处。

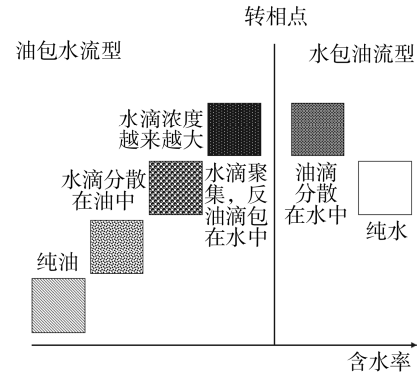


图 3 油水两相流体的转化过程

Fig.3 Oil-water two-phase conversion process

## 3 弹流润滑方程

等温条件下的 Reynold 方程<sup>[14]</sup>为:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\rho h^3}{\eta} \frac{dp}{dx} \right) = 12U \frac{d(\rho h)}{dx} \quad (5)$$

式中:  $p$  是油水两相流体的润滑膜压力;  $x$  是坐标变量;  $U=(u_1+u_2)/2$ ,  $u_1$ 、 $u_2$  分别为两接触表面的速度。

膜厚方程为:

$$h(x) = h_0 + \frac{x^2}{2R} - \frac{1}{\pi E'} \int_{-\infty}^x p(s) \ln(x-s)^2 ds \quad (6)$$

式中:  $E'$  为锥套与衬套表面的综合弹性模量, 它与两表面的弹性模量  $E_1$ 、 $E_2$  及泊松比  $\nu_1$ 、 $\nu_2$  的关系是:

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \quad (7)$$

采用 Dowson 和 Higginson<sup>[15]</sup>提出的密度方程:

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{C_1 p}{1 + C_2 p} \right) \quad (8)$$

式中:  $C_1$ 、 $C_2$  为密压系数,  $C_1=0.6 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$ ,  $C_2=1.7 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$ 。

油水两相流的粘压关系采用以下经验公式<sup>[16]</sup>:

$$\eta = \eta_0 \exp \{ (\ln \eta_0 + 9.67) [1 +$$

$$5.1 \times 10^{-9} p)^{\bar{z}_0} - 1] \} \quad (9)$$

式中:  $Z_0$  为粘压系数;  $\eta_0$  为油水两相流的环境黏度。

压力  $p$  满足载荷方程:

$$w = \int_{x_{in}}^{x_{out}} p dx \quad (10)$$

式中: 记  $w$  为单位长度上的载荷;  $x_{in}$  为计算区的起点坐标;  $x_{out}$  为终点坐标。为了保证润滑状态, 对于线接触问题, 润滑膜的边界条件为: 当  $x_{in} = -4.6$ 、 $x_{out} = 1.4$  时,  $p(x_{in}) = p(x_{out}) = 0$ ; 当  $x_{in} \leq x^* \leq x_{out}$  时,  $p(x^*) \geq 0$ 。

## 4 数值方法

为增强运算过程的稳定性, 需对各弹流润滑方程进行无量纲化处理:  $\bar{p} = p/p_H$ ,  $\bar{h} = hR/b^2$ ,  $\bar{x} = x/b$ ,  $\bar{\eta} = \eta/\eta_0$ ,  $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$ ,  $\bar{W} = w/E'R$ ,  $\bar{U} = \eta_0 u/E'R$ ,  $\bar{G} = \alpha E'$ 。其中,  $\bar{p}$  为无量纲油水两相流润滑膜压力;  $p_H$  为 Hertz 最大接触压力 (Pa);  $\bar{h}$  为无量纲膜厚;  $\bar{x}$  为无量纲坐标变量;  $\bar{\rho}$  为无量纲密度;  $\bar{W}$  为无量纲载荷参数;  $\bar{U}$  为无量纲卷吸速度。

无量纲化的 Reynolds 方程为:

$$\frac{d}{d\bar{x}} \left( \varepsilon \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \right) - \frac{d(\bar{\rho}\bar{h})}{d\bar{x}} = 0 \quad (11)$$

式中:  $\varepsilon = (\bar{\rho}\bar{h}^3)/(\bar{\eta}\lambda)$ ;  $\lambda = 3\pi^2 \bar{U}/(4\bar{W}^2)$ 。

无量纲化的膜厚方程为:

$$\bar{h}(\bar{x}) = \bar{h}_0 + \frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{1}{\pi} \int_{\bar{x}_{in}}^{\bar{x}_{out}} \bar{p}(\bar{x}') \ln |\bar{x} - \bar{x}'| d\bar{x}' \quad (12)$$

式中:  $\bar{h}_0$  为一未知的无量纲常数, 其数值结果只能在运算过程中获得。

无量纲化的密压方程为:

$$\bar{\rho} = \left( 1 + \frac{0.6 \times 10^{-9} p_H \bar{p}}{1 + 1.7 \times 10^{-9} p_H \bar{p}} \right) \quad (13)$$

无量纲的粘压方程为:

$$\bar{\eta} = \exp \{ (\ln \eta_0 + 9.67) [(1 + 5.1 \times 10^{-9} p_H \bar{p})^{\bar{z}_0} - 1] \} \quad (14)$$

无量纲化的载荷方程为:

$$\int_{\bar{x}_{in}}^{\bar{x}_{out}} \bar{p} d\bar{x} = \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

最后, 利用有限差分法对式 (11) — (15) 进行离散化处理, 求解压力时采用多重网格法, 求解弹性变形时采用多重网格积分法, 求解温度时采用逐列扫描法<sup>[17-18]</sup>。求解压力时采用 W 循环, 网格层为 6 层, 最密层上的节点数为 961。采用 Gauss-Seidel 松弛迭代法计算压力, 直到压力和载荷的收敛精度均小于  $10^{-3}$  时, 迭代中止。

## 5 结果及分析

采用的轧机油膜轴承长度为 315 mm, 锥套直径为 420 mm, 衬套直径为 421 mm, 直径间隙为 1 mm。采用含水率为 10% 的油水两相流体作为润滑剂, 润滑油的黏度为 0.017 Pa·s, 水的黏度为 0.001 Pa·s, 无量纲主轴转速为  $U = 1.5 \times 10^{-12}$ , 无量纲轧制力  $W = 1.0 \times 10^{-5}$ 。表 1 为轧机油膜轴承润滑系统的各组成参数。

表 1 轧机油膜轴承润滑系统各组成参数  
Tab.1 The component parameters of oil film bearing lubrication system

Materials	Density / (kg·m <sup>-3</sup> )	Specific heat/ (J·kg <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> )	Thermal conductivity/ (W·m <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> )	Young's modulus/GPa	Poisson ratio
Oil	870	2000	0.24		
Water	1000	4190	0.54		
Babbitt alloy	7300	640	34	220	0.25
Steel	7850	470	46	210	0.3

### 5.1 油膜进水对压力膜厚的影响

从图 4—5 可以看出, 不同含水率对压力分布影响不大, 对膜厚分布有较大影响, 当含水率在 30% 以内, 即油包水流型时, 随着含水率的升高, 膜厚

增加; 当含水率超过 30%, 即水包油流型时, 随着含水率的升高, 膜厚减小。通过对比可知, 油包水型流体的整体膜厚明显高于水包油型流体的整体膜厚, 因此油包水型两相流体具有更佳的润滑性能, 本文选取含水率为 10% 的油水两相流体进行分析。

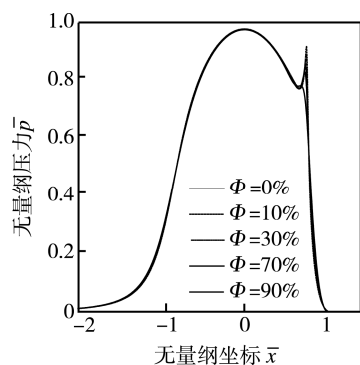


图 4 不同含水率下压力分布

Fig.4 Pressure distribution under different moisture content

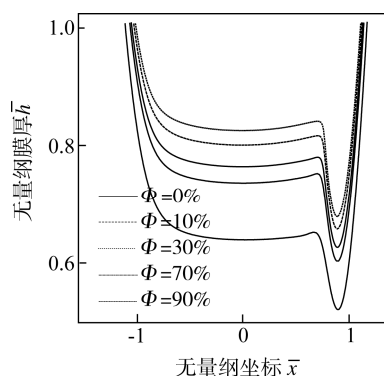


图 5 不同含水率下膜厚分布

Fig.5 Film thickness distribution under different moisture content

## 5.2 不同滑滚比对压力膜厚的影响

由图 6—7 可以看出, 在油水两相流体润滑条件下 ( $\Phi=10\%$ ), 随着滑滚比的增加, 压力峰值减小, 二次压力峰值增大, 膜厚及最小膜厚减小。

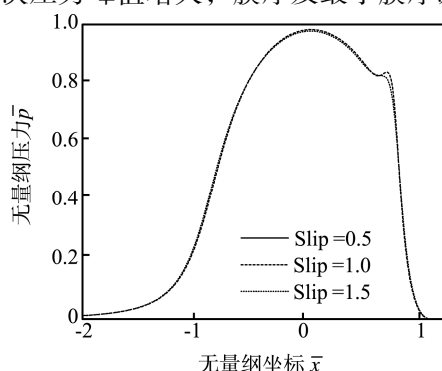


图 6 不同滑滚比下压力分布

Fig.6 Pressure distribution under different slip ratio

## 5.3 轴径间隙对压力膜厚的影响

从图 8—9 可以看出, 在油水两相润滑条件下 ( $\Phi=10\%$ ), 随着轴承半径间隙的增加, 入口区的压力逐渐减小, 压力峰值增加, 二次压力峰值减小, 膜厚与最小膜厚均减小。

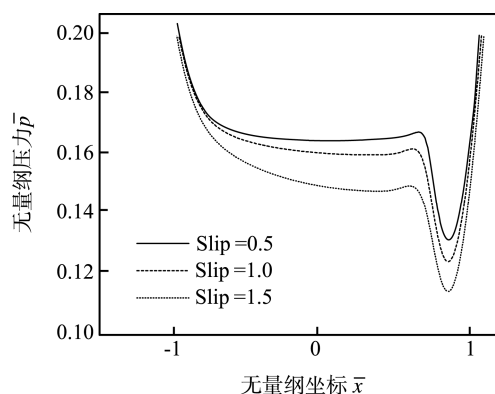


图 7 不同滑滚比下膜厚分布

Fig.7 Film thickness distribution under different slip ratio

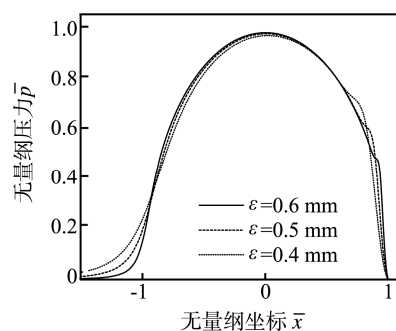


图 8 不同轴径间隙下压力分布

Fig.8 Pressure distribution under different gap of axial diameter

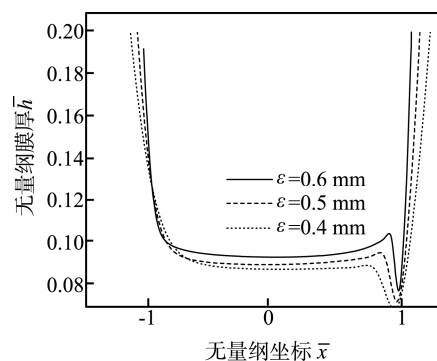


图 9 不同轴颈间隙下膜厚分布

Fig.9 Film thickness distribution under different gap of axial diameter

## 5.4 主轴转速对压力膜厚的影响

从图 10—11 可以看出, 在油水两相润滑条件下 ( $\Phi=10\%$ ), 随着转速的增加, 入口区的压力逐渐增大, 压力峰值减小, 二次压力峰越来越明显且峰值增大, 膜厚及最小膜厚均增大。

## 5.5 轧制力对压力膜厚的影响

从图 12—13 可以看出, 在油水两相润滑条件下 ( $\Phi=10\%$ ), 随着载荷的增加, 入口区的压力逐

渐减小, 压力峰值增加, 二次压力峰趋向变缓且峰值减小, 膜厚及最小膜厚均减小。

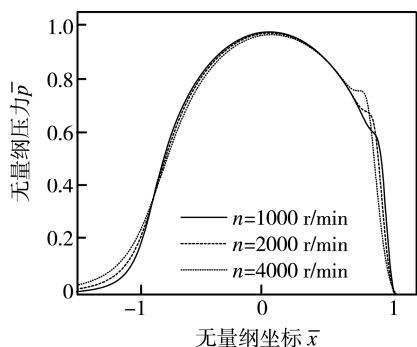


图 10 不同转速下压力分布

Fig.10 Pressure distribution at different velocity

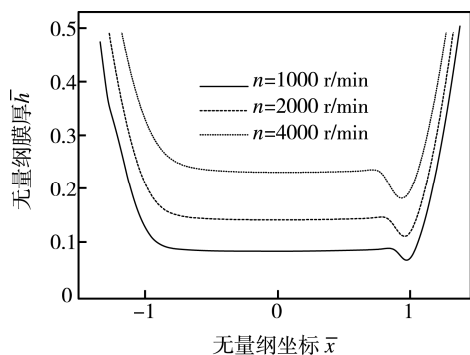


图 11 不同转速下膜厚分布

Fig.11 Film thickness distribution at different velocity

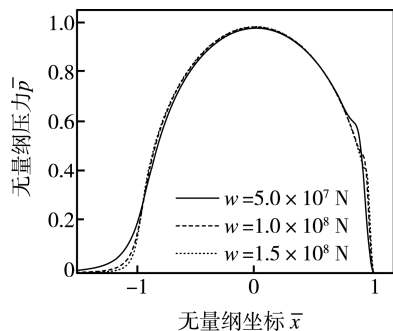


图 12 不同载荷下压力分布

Fig.12 Pressure distribution under different loads

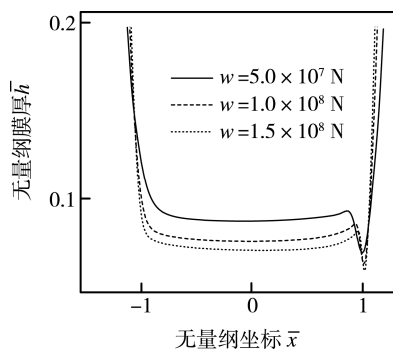


图 13 不同载荷下膜厚分布

Fig.13 Film thickness distribution under different loads

## 6 结论

1) 在等温条件下, 随着润滑油中含水率的增加, 油水两相流体由油包水流型转化为水包油流型, 压力变化不大, 膜厚先增加后减小, 与黏度的变化趋势相一致, 当油水两相流体为油包水流型时润滑性能最优。

2) 在油包水型两相流体润滑的条件下, 随着滑滚比和轧机油膜轴承主轴转速的增加, 入口区的压力增加, 压力峰减小, 二次压力峰值增大, 承载能力减弱, 同时膜厚增加, 润滑性能增强。随着轴颈间隙和外部轧制力的增加, 入口区的压力减小, 压力峰增加, 二次压力峰值减小, 承载能力增强, 同时膜厚减小, 润滑性能减弱。

## 参考文献:

- [1] 王建梅, 黄庆学, 丁光正. 轧机油膜轴承润滑理论研究进展[J]. 润滑与密封, 2012, 37(10): 112—116.  
WANG Jian-mei, HUANG Qing-xue, DING Guang-zheng. Advances on Mill Oil-film Bearing Lubrication Theory Research[J]. Lubrication Engineering, 2012, 37(10): 112—116.
- [2] TAYLOR G I. The Viscosity of a Fluid Containing Small Drops of Another Fluid[J]. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1932, 138(834): 41—48.
- [3] MACDONALD J W. Marine Turbine Oil System Maintenance[J]. Lubrication Engineering. 1965, 21 (10): 429—432.
- [4] SCHATZBERG P, FELSEN I M. Effects of Water and Oxygen during Rolling Contact Lubrication[J]. Wear, 1968, 12(5): 331—342.
- [5] NAKAHARA T, MAKINO T, KYOGOKU K. Observations of Liquid Droplet Behavior and Oil Film Formation in O/W Type Emulsion Lubrication[J]. Journal of Tribology, 1988, 110(2): 348—354.
- [6] AL-SHARIF A, CHAMNIPRASART K, RAJAGOPAL K R, et al. Lubrication With Binary Mixtures: Liquid-Liquid Emulsion[J]. Journal of Tribology, 1993, 115(1): 46—55.
- [7] 夏守浩, 安琦. 油水两相流对滑动轴承油膜压力的影响[J]. 机械科学与技术, 1999(3): 141—142.  
XIA Shou-hao, AN Qi. Study of the Influence of Watery Oil on the Oil Film Pressure of Journal Bearing[J]. Mechanical Science & Technology, 1999(3): 141—142.
- [8] 江延明, 李传宪. W/O 乳状液的流变性研究[J]. 油气储运, 2000, 19(1): 10—12.  
JIANG Yan-ming, LI Chuan-xian. Research on Rheological Properties of W/O Emulsion[J]. OGST, 2000, 19(1):

- 10—12.
- [9] 胡志华, 刘磊, 周芳德, 等. 油水两相乳化液流动特性的实验研究[J]. 上海交通大学学报, 2005, 39(2): 314—316.  
HU Zhi-hua, LIU Lei, ZHOU Fang-de, et al. An Experimental Study on the Flow Characteristics for Oil-Water Emulsions[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2005, 39(2): 316—316.
- [10] 杨莹, 路长厚. 水包油乳化液润滑的动静压轴承静特性研究[J]. 润滑与密封, 2008, 33(7): 25—27.  
YANG Ying, LU Chang-hou. Research on the Static Performance of Hybrid Bearing Lubricated with the Emulsion of Oil in Water[J]. Lubrication Engineering, 2008, 33(7): 25—27.
- [11] HARIKA E, JARNY S, MONNET P, et al. Effect of Water Pollution on Rheological Properties of Lubricating Oil [J]. Applied Rheology, 2011, 21(1): 255—258.
- [12] CARONNI, ERNESTO P, CIARPELLA, et al. Effects of Water Contamination of Lubricants on Hydrodynamic Lubrication: Rheological and Thermal Modeling[J]. Journal of Tribology, 2013, 135(4): 1115—1115.
- [13] 温诗铸. 摩擦学原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
- WEN Shi-zhu. Tribology Principles[M]. Beijing: Tsing-hua University Press, 1990.
- [14] YANG P, WEN S. A Generalized Reynolds Equation for Non-Newtonian Thermal Elastohydrodynamic Lubrication[J]. Journal of Tribology, 1990, 112(4): 631—636.
- [15] DOWSON D, HIGGINSON G R. Elastohydrodynamic Lubrication: The Fundamentals of Roller and Gear Lubrication[M]. Oxford: Pergamon Press, 1977.
- [16] ROELANDS A. Correlational Aspects of the viscosity-temperature-pressure Relationship of Lubricating Oils [D]. Netherlands: Delft University of Technology, 1966.
- [17] 郭峰, 杨沛然, 常秋英. 等温线接触弹流润滑求解的多重网格技术[J]. 青岛建筑工程学院学报, 1998, 19(3): 51—58.  
GUO Feng, YANG Pei-ran, CHANG Qiu-ying. Multilevel Techniques of Solution to Isothermal EHL Line Contact Problems[J]. Journal of Qingdao Institute of Architecture & Engineering, 1998, 19(3): 51—58.
- [18] 杨沛然. 流体润滑数值分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 1998.  
YANG Pei-ran. Numerical Analysis of Fluid Lubrication [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1998.